



Une méthode d'éléments finis pour la simulation dans un réservoir de déplacements bidimensionnels d'huile par de l'eau

Guy Chavent, B. Cockburn, Gary Cohen, Jérôme Jaffré

► To cite this version:

Guy Chavent, B. Cockburn, Gary Cohen, Jérôme Jaffré. Une méthode d'éléments finis pour la simulation dans un réservoir de déplacements bidimensionnels d'huile par de l'eau. [Rapport de recherche] RR-0353, INRIA. 1989. inria-00076204


HAL Id: inria-00076204

<https://inria.hal.science/inria-00076204>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

The logo for IRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) is displayed in a bold, stylized, white font against a dark, grainy background.

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Original

Rapports de Recherche

N° 353

**UNE MÉTHODE
D'ÉLÉMENTS FINIS
POUR LA SIMULATION
DANS UN RÉSERVOIR
DE DÉPLACEMENTS
BIDIMENSIONNELS
D'HUILE PAR DE L'EAU**

**Guy CHAVENT
Bernardo COCKBURN
Gary COHEN
Jérôme JAFFRE**

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105

78153 Le Chesnay Cedex
France

Tel (3) 954 90 20

Janvier 1985

RESUME

On décrit une méthode d'éléments finis pour la simulation dans un gisement de pétrole de déplacements bidimensionnels diphasiques incompressibles. Cette méthode utilise des éléments finis mixtes et une méthode de décentrage discontinu. On présente les modèles x-y, x-z, r-z et comment implémenter les puits dans ces différents cas.

ABSTRACT

We describe a finite element method to simulate two-dimensional two-phase incompressible displacements in an oil field. The method uses mixed finite elements and discontinuous upstream weighting. We present the models x-y, x-z, r-z and explain how to implement wells in these various cases.

MOTS CLES : Eléments finis, Décentrage, Simulation de Réservoir.

KEY WORDS : Finite Elements, Upwinding, Reservoir Simulation.

TABLE DES MATIERES

	Pages
0 - <u>Introduction</u>	1
I - <u>Modèle à un type de roche et sans puits</u>	3
1.1 - Les équations continues	3
1.2 - Les équations approchées	4
1.3 - Choix des bases des espaces de dimension finie	9
1.4 - Ecriture matricielle des équations en pression	10
1.5 - Résolution numérique du système linéaire des équations en pression	12
1.6 - Ecriture matricielle des équations en saturation	13
1.7 - Intégration numérique	20
1.8 - Récapitulation	26
II - <u>Modèle à plusieurs types de roches</u>	31
2.1 - Modification des équations approchées § 1.2	34
2.2 - Modification des équations discrètes	39
III - <u>Introduction de puits dans le modèle x-y</u>	51
3.1 - Les macroéléments puits	51
3.2 - Modification des équations en pression	53
3.3 - Modification des équations en saturation	57
3.4 - Récapitulation	62
IV - <u>Le modèle x-z</u>	67
4.1 - Le modèle x-z sans puits	67
4.2 - Les puits verticaux	68
4.3 - Modification des équations en pression	70
4.4 - Modification des équations en saturation	76
V - <u>Le modèle r-z</u>	79
5.1 - Les équations et les conditions sur les bords autres que le puits	79
5.2 - Introduction du puits vertical	80
5.3 - Modification des équations en pression	82

5.4 - Modification des équations en saturation	86
5.5 - Intégration numérique	87
<u>Annexe 1</u> <u>Une méthode rapide de résolution des équations</u>	
<u>en pression</u>	91
A1.1 - Introduction	91
A1.2 - Une formulation équivalente des équations en pression	91
A1.3 - Ecriture matricielle de la nouvelle formulation.....	93
A1.4 - Résolution du système linéaire	95
A1.5 - Modèle a plusieurs types de roches.....	96
A1.6 - Puits dans le modèle x-y	97
A1.7 - Le modèle x-z	98
A1.8 - Le modèle r-z	99
<u>Annexe 2</u> <u>Limitation des pentes de la saturation</u>	101
A2.1 - Introduction	101
A2.2 - Limitation des pentes en dimension 2	102
A2.3 - Résolution du problème de minimisation (A2.1)	103
<u>Nomenclature</u>	107
<u>Bibliographie</u>	115

0 - INTRODUCTION

Ce rapport est l'annexe technique du programme Bidimix, écrit en commun par SNEA(P), IFP et INRIA.

On y décrit comment simuler par une méthode d'éléments finis les déplacements bidimensionnels de deux fluides immiscibles incompressibles dans les conditions d'un gisement de pétrole.

La formulation des équations continues est celle donnée dans [2] qui introduit la pression globale pour simplifier l'équation en pression. L'équation en saturation est une équation de diffusion-convection tandis que l'équation en pression est une équation elliptique.

Dans l'équation en saturation, la pression n'intervient que par l'intermédiaire de la vitesse ce qui justifie l'utilisation d'éléments finis mixtes [15] pour l'équation en pression. La pression et la vitesse sont alors calculées par une méthode de Lagrangien augmenté [9] ou par une autre méthode [7], plus récente et plus rapide, inspirée de [16] et exposée dans l'annexe 1.

Concernant l'équation en saturation, la convection y étant dominante, on utilise une méthode de décentrage pour les éléments finis discontinus qui est une extension des techniques décrites dans [10], [14]. Dans l'annexe 2, on décrit comment on peut lui associer une méthode de limitation des pentes qui supprime les oscillations et améliore la stabilité. Cette méthode, proposée d'abord en dimension 1 dans [17] dans un autre contexte, est aussi exposée dans [7]. La saturation étant approchée par des éléments finis discontinus, le terme de diffusion de l'équation en saturation est approchée encore par une méthode d'éléments finis mixtes.

Les premiers exposés de la méthode sont dans [6] pour la dimension 1, et dans [12] pour la dimension 2 quand la gravité est négligée et dans [8] quand elle est prise en compte.

La semi-discrétisation en espace de l'équation en saturation est décrite et analysée dans [11] pour une équation de diffusion-convection linéaire. De plus, la semi-discrétisation en espace des deux équations couplées a été analysée dans [13] pour le cas des fluides miscibles.

Les articles, [4], [5] sont des résumés des techniques utilisées. Cependant, dans [5], on utilise une base à divergence nulle d'éléments finis mixtes pour l'équation en pression, ce que nous ne ferons pas ici.

Dans [4], comme dans [3], le problème de la représentation des puits est évoqué. On y introduit des macroéléments pour simuler les puits dans un modèle x-y.

Enfin, le chapitre IV de [7] contient la description la plus récente des méthodes décrites ci-dessous, mis à part la représentation des puits qui n'y est pas abordée.

L'objet de ce rapport est de montrer comment on passe des équations continues aux équations matricielles, c'est-à-dire à un niveau proche de la programmation en utilisant ces techniques nouvelles développées à l'INRIA.

Dans le chapitre I de ce rapport, on commence par considérer un domaine x-z sans puits avec un seul type de roche.

Dans le chapitre II, on montre comment on introduit le cas de gisements à plusieurs types de roche.

Au chapitre III, on introduit des puits dont le voisinage est simulé à l'aide de macroéléments.

Au chapitre IV, on s'intéresse au cas x-z où des puits verticaux traversent le maillage.

Au chapitre V, enfin, c'est un modèle r-z qui est construit.

L'Annexe 1 décrit une méthode rapide de résolution des équations en pression.

L'Annexe 2 expose la méthode de limitation des pentes de la saturation.

Une nomenclature à la fin fixe les notations

1. - MODELE A UN TYPE DE ROCHE ET SANS PUIT

1.1. - Les équations continues

Soit $\tilde{\Omega}$ un gisement polygonal. On suppose, pour l'instant, que dans $\tilde{\Omega}$ il y a un seul type de roche et qu'il n'y a pas de puits.

Utilisant la nomenclature fournie en annexe, les équations simulant les déplacements diphasiques incompressibles qu'on se propose de résoudre sont les suivantes :

Equations en pression

$$(1.1) \quad \text{div } \vec{q}_0 = 0$$

$$(1.2) \quad \vec{q}_0 = -\psi(x) d(S) \nabla P + d(S) \sum_{j=1}^2 \gamma_j(S) \vec{q}_j$$

Equations en saturation

$$(1.3) \quad \psi \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } \vec{\varphi}_w = 0$$

$$(1.4) \quad \begin{cases} \vec{\varphi}_w(x, t, S(x, t)) = \vec{r}(x, t) + \vec{f}(x, t, S(x, t)) \\ \vec{r}(x, t) = -\psi(x) P_{CM}(x) d(S(x, t)) \nabla \alpha(S(x, t)) \\ \vec{f}(x, t, k) = b_0(k) \vec{q}_0(x, t) + \sum_{j=1}^2 b_j(k) \vec{q}_j(x) \end{cases}$$

En absence de puits, les conditions sur le bord de $\partial \tilde{\Omega}$ appartiennent à l'un des trois types suivants :

Frontière imperméable Γ_{imp} :

$$(1.5) \quad \vec{q}_0 \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{vitesse globale nulle})$$

$$(1.6) \quad (\vec{r} + \sum_{j=1}^2 b_j(S) \vec{q}_j) \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{vitesse en eau nulle})$$

Frontière alimentée en eau du type 1 Γ_w^1

$$(1.7) \quad P = P_d \quad (\text{pression donnée})$$

$$(1.8) \quad S = 1 \quad (\text{frontière saturée en eau})$$

Frontière alimentée en eau du type 2 Γ_w^2

$$(1.9) \quad \vec{q}_0 \cdot \vec{v} = q_d \quad (\text{vitesse globale fixée})$$

$$(1.10) \quad S = 1 \quad (\text{frontière saturée en eau})$$

De plus, on a la condition initiale :

$$S(x,0) = S_0(x), \quad x \in \tilde{\Omega}.$$

1.2. - Les équations approchées

On construit sur $\tilde{\Omega}$ un maillage fait de triangles et de parallélogrammes. On note \mathcal{T}_h l'ensemble des éléments du maillage et \mathcal{A}_h l'ensemble de ses arêtes. Chaque frontière $\Gamma_{\text{imp}}, \Gamma_w, \Gamma_w^2$ est supposée être un sous ensemble de \mathcal{A}_h .

Pour la discrétisation en temps, on utilisera un schéma explicite et pour la discrétisation en espace, on utilisera les éléments finis mixtes pour les termes du 2ème ordre et une extension des schémas de Lesaint et Godunov pour les termes du 1er ordre.

On suppose que les données sont telles que P_d est constant sur chaque arête de Γ_w^1 , q_d constant sur chaque arête de Γ_w^2 et $S_0 \in M_h^1$. $S_{\Gamma_{\text{imp}}}^-$ est par exemple un prolongement de S_0 par continuité sur Γ_{imp}

Equation donnant (P^n, \vec{q}^n)

$$(1.11) \quad \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div} \vec{q}_0^n \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in M_h^0$$

$$(1.12) \quad \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{q}_0^n \cdot \vec{s} \, dx - \int_{\tilde{\Omega}} P^n \operatorname{div} \vec{s} \, dx = \int_{\tilde{\Omega}} \sum_{j=1}^2 \gamma_j(S^n) \psi^{-1} \vec{q}_j \cdot \vec{s} \\ - \int_{\Gamma_w^1} P_d^n \vec{s} \cdot \vec{\nu} \, d\gamma \quad \forall \vec{s} \in \vec{X}_h^0, \quad \vec{s} \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_{\text{imp}} \cup \Gamma_w^2} = 0$$

$$(1.13) \quad \vec{q}_0^n \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_{\text{imp}}} = 0, \quad \vec{q}_0^n \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_w^2} = \vec{q}_d^n$$

L'équation (1.11) est l'équation (1.1) multipliée par des fonctions test. L'équation (1.12) est l'équation (1.2) multipliée par des fonctions test et où l'on a intégré par parties en tenant compte des conditions aux bords (1.5), (1.7), (1.9). Les équations (1.13) traduisent les conditions aux bords (1.5), (1.9).

Il reste maintenant à approcher les équations en saturation (1.3), (1.4), (1.6), (1.8), (1.10), qui font intervenir, tant à l'intérieur de $\tilde{\Omega}$ que sur sa frontière, le débit d'eau. Au vu de (1.4), il est donc naturel de définir le champs des débits d'eau $\vec{\psi}_w^n(x)$ à l'instant n par :

$$(1.13\text{ter}) \quad \begin{cases} \vec{\psi}_w^n(x) = \vec{r}^n(x) + \vec{f}^n(x, S^n(x)) \\ \text{où :} \\ \vec{f}^n(x, k) = b_0(k) \vec{q}_0^n(x) + \sum_{j=1}^2 b_j(k) \vec{q}_j^n(x) \\ \vec{r}^n, \vec{q}_0^n, \vec{q}_1^n, \vec{q}_2^n \in \vec{X}_h^0 \end{cases} \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \forall k \in [0, 1]$$

Il y a par contre un problème pour définir le flux de $\vec{\psi}_w^n(x)$ à travers une arête A du maillage : bien que sur chaque arête A les composantes normales des champs \vec{r} , \vec{q}_0 , \vec{q}_1 et \vec{q}_2 soient continues (puisque'ils sont tous dans X_h^0 !), la composante normale de $\vec{\psi}_w$ sur une arête A n'est pas continue, par suite de la présence des coefficients $b_0(S^n)$, $b_1(S^n)$ et $b_2(S^n)$ et

de la discontinuité de S^n sur A . Il faut donc, pour définir le flux d'eau $\vec{\phi}_w^n(\gamma) \cdot \vec{v}$ en un point γ de A , choisir la valeur de S que l'on utilisera pour calculer la trace sur A de $\vec{f}^n(\gamma, S^n) \cdot \vec{v}$ (c'est ici qu'intervient le décentrage).

On définit donc le flux d'eau, en tout point γ d'une arête A , que l'on notera encore par abus de notation $\vec{\phi}_w \cdot \vec{v}(\gamma)$:

$$(1.13\text{quarto}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\phi}_w^n \cdot \vec{v}(\gamma) = \vec{r}^n(\gamma) \cdot \vec{v} + \vec{f}^n(\gamma, \xi) \cdot \vec{v} \\ \text{où } \xi \text{ est choisi tel que :} \\ \vec{f}^n(\gamma, \xi) \cdot \vec{v} = \text{signe}(S^{n+}(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) \cdot \text{Min}_{k \in I(S^{n+}(\gamma), S^{n-}(\gamma))} \{ \text{signe}(S^{n+}(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) \vec{f}^n(\gamma, k) \cdot \vec{v} \} \end{array} \right.$$

La saturation de Godunov ξ ainsi définie dépend du point γ de A où elle est évaluée. La saturation ξ n'est pas nécessairement définie de façon unique par (1.13 quarto), mais le flux $\vec{f}^n(\gamma, \xi) \cdot \vec{v}$ l'est (c'est donc lui que l'on stockera ultérieurement, aux points de Gauss de chaque arête). Dans (1.13 quarto), $S^{n+}(\gamma)$ et $S^{n-}(\gamma)$ sont les valeurs de S^n en γ de part et d'autre de l'arête A , + et - correspondant à l'aval et à l'amont par rapport à la normale \vec{v} . Remarquez que $\vec{f}^n(\gamma, \xi) \cdot \vec{v}$ ne fait que changer de signe si l'on change l'orientation de \vec{v} , puisque l'argument du Min reste inchangé ! La définition (1.13quarto) du flux d'eau est donc bien intrinsèque.

Dans le cas particulier où $\vec{q}_1 = \vec{q}_2 = 0$ et où le fractional flow b_0 est constant, la définition (1.13quarto) revient à prendre pour ξ la saturation amont par rapport au champ des débits globaux \vec{q}_0 : on retrouve la technique de décentrage de Lesaint.

Nous pouvons maintenant décrire les approximations utilisée pour les équations en saturation.

Equations donnant \vec{r}^n

En multipliant la deuxième équation de (1.4) par une fonction test \vec{s} ayant un flux nul à travers Γ_{imp} , et en intégrant par partie on trouve, en utilisant (1.8), (1.10) :

$$(1.14) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{P_{CM} d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{r}^n \cdot \vec{s} \, dx = \int_{\Omega} \alpha(S^n) \operatorname{div} \vec{s} \, dx - \int_{\Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2} \alpha(1) \vec{s} \cdot \vec{\nu} \, d\gamma$$

$$\forall \vec{s} \in \vec{X}_h^0, \quad \vec{s} \cdot \vec{\nu} |_{\Gamma_{imp}} = 0$$

et (1.6) est approchée par :

$$(1.15) \quad \int_A \vec{r}^n \cdot \vec{\nu} \, d\gamma = - \int_A \vec{f}(\gamma, \bar{\xi}) \cdot \vec{\nu} \, d\gamma \quad \forall A \in \Gamma_{imp}$$

où :

$$(1.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{la saturation } \bar{\xi} \text{ est déterminée, en tout point } \gamma \text{ de } \Gamma_{imp}, \text{ par :} \\ \vec{f}(\gamma, \bar{\xi}) \cdot \vec{\nu} = \operatorname{signe}(S_{\Gamma_{imp}}^{n-1} - S^n|_{\Gamma_{imp}}) \cdot \\ \quad \cdot \min_{k \in I(S_{\Gamma_{imp}}^{n-1}, S^n|_{\Gamma_{imp}})} \{ \operatorname{signe}(S_{\Gamma_{imp}}^{n+1} - S^n|_{\Gamma_{imp}}) \vec{f}(\gamma, k) \cdot \vec{\nu} \} \\ \text{où } S^n|_{\Gamma_{imp}} = \text{trace intérieure de } S^n \text{ sur } \Gamma_{imp} \end{array} \right.$$

On a utilisé la notation $\bar{\xi}$ et non ξ car $\bar{\xi}$ n'est qu'une approximation du ξ défini en (1.13quarto) : pour avoir $\bar{\xi} = \xi$ il faudrait dans (1.16) remplacer $S_{\Gamma_{imp}}^{n-1}$ par $S_{\Gamma_{imp}}^n$. Le "découplage" utilisé dans (1.16) a pour but d'éviter un couplage entre les équations (1.14), (1.15) et (1.16), qui nécessiterait de résoudre un système non linéaire en \vec{r}^n et $S_{\Gamma_{imp}}^n$.

Equation donnant $S_{\Gamma_{imp}}^n$

En multipliant maintenant la deuxième équation de (1.4) par des fonctions test \vec{s} ayant un flux nul en dehors de Γ_{imp} et en intégrant par partie, on trouve :

$$(1.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Gamma_{imp}} \alpha(S_{\Gamma_{imp}}^n) \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\gamma &= - \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{P_{CM}} \psi^{-1} \frac{\vec{r}^n}{r} \cdot \vec{s} dx + \int_{\tilde{\Omega}} \alpha(S^n) \operatorname{div} \vec{s} \\ \forall \vec{s} \in \vec{X}_h^0, \quad \vec{s} \cdot \vec{\nu}|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_{imp}} &= 0, \quad \vec{s} \cdot \vec{\nu}|_{\Gamma_{imp}} \neq 0 \end{aligned} \right.$$

Equation donnant S^{n+1}

En utilisant les définitions (1.13ter) et (1.13quarto), l'équation (1.3) est approchée par :

$$(1.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_K \psi \frac{S^{n+1} - S^n}{\Delta t} v dx - \int_K \vec{\varphi}_w^n(x) \cdot \nabla v(x) dx + \sum_{\substack{A \subset \partial K \\ A \not\subset \Gamma_{imp}}} \int_A \vec{\varphi}_w^n \cdot \vec{\nu}(\gamma) v(\gamma) d\gamma \\ \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall v \in M_h^1 \\ \text{où } \vec{\nu} \text{ est la normale extérieure à } K. \end{aligned} \right.$$

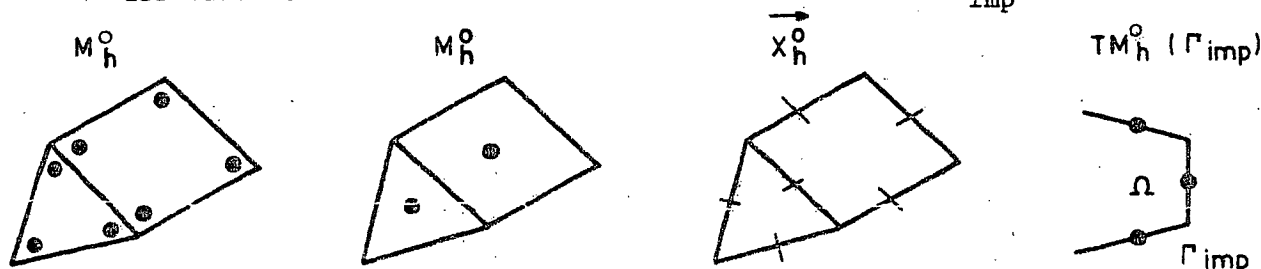
On remarquera que l'on a tenu compte explicitement, dans le dernier terme de (1.18), du fait que le débit d'eau était nul sur Γ_{imp} . Ceci permet de corriger, au moins au niveau du bilan, l'erreur introduite par le découplage dans (1.16).

1.3. - Choix des bases des espaces de dimension finie

On note nt , nq , na respectivement les nombres de triangles, de quadrilatères et d'arêtes du maillage. On note encore $ne = nt + nq$ et $nsat = 3nt + 4nq$. On a :

$$\dim M_h^1 = nsat \quad \dim M_h^0 = ne \quad \dim \vec{X}_h^0 = na$$

Les degrés de liberté d'une fonction de M_h^1 sont, pour chaque élément les valeurs de la fonction aux sommets, ceux d'une fonction de M_h^0 sont les valeurs de la fonction au barycentre des éléments et ceux d'une fonction de \vec{X}_h^0 sont les valeurs des débits de la fonction à travers les arêtes du maillage, après avoir défini un sens positif de traversée de ces arêtes. Enfin les degrés de liberté d'une fonction de $TM_h^0(\Gamma_{imp})$ sont les valeurs de la fonction au milieu des arêtes de Γ_{imp} .



Les bases correspondantes de M_h^1 , M_h^0 , \vec{X}_h^0 , $TM_h^0(\Gamma_{imp})$ sont respectivement :

$$\{v_{K,j}\}_{K \in \mathcal{T}_h, j=1, \dots, ns(K)} \quad \{v_K\}_{K \in \mathcal{T}_h} \quad \{\vec{s}_A\}_{A \in \mathcal{A}_h} \quad \{v_A\}_{A \in \mathcal{A}_h, A \in \Gamma_{imp}}$$

où $ns(K)$ est le nombre de sommets de l'élément K .

On écrit alors les inconnues dans ces bases :

$$S = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{j=1}^{ns(K)} S_{K,j} v_{K,j} \quad \vec{r} = \sum_{A \in \mathcal{A}_h} R_A \vec{s}_A \quad P = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} P_K v_K$$

$$\vec{q}_0 = \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A \vec{s}_A \quad S_{\Gamma_{imp}} = \sum_{A \in \mathcal{A}_h, A \in \Gamma_{imp}} S_{EXT_A} v_A$$

Les vecteurs des composantes seront notés :

$$S = (S_{K,j})_{K \in \mathcal{K}_h, j=1, \dots, ns(K)} \quad R = (R_A)_{A \in \mathcal{A}_h} \quad P = (P_K)_{K \in \mathcal{K}_h}$$

$$Q = (Q_A)_{A \in \mathcal{A}_h} \quad S_{\Gamma_{imp}} = (S_{EXT})_{A \in \mathcal{A}_h, A \subset \Gamma_{imp}}$$

On introduit encore les vecteurs $Q_j = (Q_{jA})_{A \in \mathcal{A}_h}$, $j = 1, 2$ formés des composantes d'approximations des champs \vec{q}_j dans \tilde{X}_h^0 et les vecteurs

$$\left\{ \begin{array}{l} P_d = (P_{dA})_{A \in \mathcal{A}_h} \quad \text{où } P_{dA} = \frac{1}{\text{mes}(A)} \int_A P_d \, d\gamma \text{ si } A \subset \Gamma_w^1 \text{ et } P_{dA} = 0 \text{ sinon} \\ Q_d = (Q_{dA})_{A \in \mathcal{A}_h, A \subset \Gamma_{imp} \cup \Gamma_w^2} \quad \text{où } Q_{dA} = \int_A q_d \, d\gamma \text{ si } A \subset \Gamma_w^2 \text{ et } Q_{dA} = 0 \text{ si } A \subset \Gamma_{imp} \end{array} \right.$$

La phase de discrétisation des équations approchées (1.11), ..., (1.18) consiste à les écrire sous forme matricielle.

1.4. - Ecriture matricielle des équations en pression

Ecrivons les équations (1.11), ..., (1.13) en utilisant les bases de M_h^0 et \tilde{X}_h^0 :

$$(1.11\text{bis}) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A \int_K \text{div } \vec{s}_A \cdot dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{K}_h$$

$$\begin{aligned} (1.12\text{bis}) \quad & \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx - \sum_{K \in \mathcal{K}_h} P_K \int_{\tilde{\Omega}} v_K \text{div } \vec{s}_B \, dx \\ & = \sum_{j=1}^2 \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_{jA} \int_{\tilde{\Omega}} \gamma_j (S^n)^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx - P_{dB} \int_B \vec{s}_B \cdot \vec{v}_{\tilde{\Omega}} \, d\gamma \\ & \quad \forall B \in \mathcal{A}_h, B \neq (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_w^2) \end{aligned}$$

où $\vec{v}_{\tilde{\Omega}}$ est la normale unitaire à $\partial\tilde{\Omega}$, extérieure à $\tilde{\Omega}$

$$(1.13\text{bis}) \quad Q_A = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}_h, A \subset \Gamma_{\text{imp}} \quad Q_A = Q_{d_A} \quad \forall A \in \mathcal{A}_h, A \subset \Gamma_w^2$$

Notons :

$$Z_{A,K} = \begin{cases} +1 & \text{si } A \subset \partial K \text{ et le sens positif de traversée de } A \text{ est sortant de } K \\ -1 & \text{si } A \subset \partial K \text{ et le sens positif de traversée de } A \text{ est entrant dans } K \end{cases}$$

Soit DIV la matrice $(\text{DIV}_{K,A})_{\substack{K \in \mathcal{T}_h \\ A \in \mathcal{A}_h}}$ (le 1er indice est l'indice de ligne)

$$(1.19) \quad \text{DIV}_{K,A} = \int_K \text{div } \vec{s}_A \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } A \not\subset \partial K \\ Z_{A,K} & \text{si } A \subset \partial K \end{cases}$$

Donc dans la ligne K, $\text{DIV}_{K,A}$ est non nul pour les 3 ou 4 arêtes de K, suivant que K est un triangle ou un parallélogramme, et vaut alors $Z_{A,K}$.

On note ensuite \tilde{A}^n la matrice symétrique $(\tilde{A}_{A,B}^n)_{A,B \in \mathcal{A}_h}$

$$(1.20) \quad \tilde{A}_{A,B}^n = \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx$$

Soient \tilde{A}^J , $J = 1, 2$ les matrices symétriques $(\tilde{A}_{A,B}^J)_{A,B \in \mathcal{A}_h}$

$$(1.21) \quad \tilde{A}_{A,B}^J = \int_{\tilde{\Omega}} \gamma_j(S^n) \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx$$

On note encore FPDIR la contribution du second membre de l'équation en pression des conditions de Dirichlet. Le vecteur $(\text{FPDIR}_A)_A \in \mathcal{A}_h$ tel que :

$$(1.22) \quad \text{FPDIR}_A = \begin{cases} 0 & \text{si } A \not\subset \Gamma_w^1 \\ Z_{A,\tilde{\Omega}} P_{d_A} & \text{si } A \subset \Gamma_w^1 \end{cases}$$

Enfin \tilde{FQ} sera le second membre des équations (1.12bis) :

$$(1.23) \quad \tilde{FQ}^n = \tilde{A}_1^n \cdot Q_1 + \tilde{A}_2^n \cdot Q_2 - \text{FPDIR}$$

Il reste ensuite à tenir compte des relations (1.13bis) ce qui est fait en modifiant localement la matrice $\tilde{A}D^n$ et le second membre $\tilde{F}Q^n$ et après modification, on les notera $\tilde{A}D^n$ et $\tilde{F}Q^n$.

Finalement les équations (1.11bis), ..., (1.13bis) s'écrivent sous forme matricielle :

$$(1.24) \quad \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}D^n & -{}^tDIV \\ \hline -DIV & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} Q^n \\ P^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}Q^n \\ 0 \end{bmatrix},$$

où tDIV est la matrice transposée de DIV .

1.5. - Résolution numérique du système linéaire des équations en pression

Le système linéaire (1.24) des équations en pression est un grand système linéaire symétrique de dimension $n_a + n_e$ mais qui n'est pas défini positif.

Dans l'annexe 1, on expose une méthode directe de résolution de ce système, qui consiste en fait à le remplacer par un système équivalent. Mais ici, on décrit une méthode itérative, la méthode du Lagrangien augmenté [9] qui utilise la forme particulière du système (1.24). Introduisons le Lagrangien défini sur $\mathbb{R}^{n_a} \times \mathbb{R}^{n_e}$:

$$\mathcal{L}(S, V) = \langle \frac{1}{2} \tilde{A}D^n \cdot S - \tilde{F}Q^n, S \rangle - \langle V, DIV S \rangle$$

ou \langle, \rangle dénote le produit scalaire de vecteurs de \mathbb{R}^{n_a} ou de \mathbb{R}^{n_e} .

Il est facile de voir que (Q^n, P^n) , solution de (1.24), est solution du problème de point selle :

$$\mathcal{L}(Q^n, P^n) = \min_{S \in \mathbb{R}^{n_a}} \times \max_{V \in \mathbb{R}^{n_e}} \mathcal{L}(S, V) = \max_{V \in \mathbb{R}^{n_e}} \min_{S \in \mathbb{R}^{n_a}} \mathcal{L}(S, V)$$

On peut donc envisager de résoudre le système (1.24) en utilisant un algorithme de recherche de point selle, par exemple l'algorithme d'Uzawa. Malheureusement, un tel algorithme appliqué directement à \mathcal{L} ne converge pas.

On introduit alors le lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}_{\omega}(S, V) = \mathcal{L}(S, V) + \omega \langle \text{DIV } S, \text{DIV } S \rangle$$

Il est facile de constater que les points selle de \mathcal{L} et \mathcal{L}_{ω} sont les mêmes puisque si S est un point selle de \mathcal{L} il vérifie $\text{div } S = 0$. Cependant l'avantage de \mathcal{L}_{ω} est que l'algorithme d'Uzawa converge pour \mathcal{L}_{ω} .

Ecrivons le. C'est une méthode itérative. Connaissant $P^{n,k}$ à l'étape k , on calcule $(Q^{n,k}, P^{n,k+1})$ par :

$$\text{-- Etape 1 : } \mathcal{L}_{\omega}(Q^{n,k}, P^{n,k}) = \min_{S \in \mathbb{R}^{na}} \mathcal{L}_{\omega}(S, P^{n,k})$$

$$\text{-- Etape 2 : } P^{n,k+1} = P^{n,k} - \rho_k \text{DIV } Q^{n,k}$$

où $\rho_k \in \mathbb{R}$.

En pratique, on prend $\rho_k = \omega$ et on note que l'étape 1 équivaut à résoudre le système linéaire de dimension na :

$$(\overline{AD}^n + \omega {}^t \text{DIV} \cdot \text{DIV}) Q^{n,k} = {}^t \text{DIV} \cdot P^{n,k} + \overline{FQ}^n$$

dont la matrice ne dépend pas des itérations k de Lagrangien augmenté.

Evidemment, on initialisera les itérations par $P^{n,0} = P^{n-1}$

1.6. - Ecriture matricielle des équations en saturation

Nous allons mettre les équations (1.14)...(1.18) sous forme matricielle, les coefficients des matrices et des second membres étant exprimés à l'aide d'intégrales sur des éléments K et de valeurs moyennes sur des arêtes A .

Pour exprimer commodément les débits d'eau, tant à l'intérieur d'un élément que à travers d'une arête, nous définissons sur chaque arête A une fonction F_A^n de la saturation $k \in [0,1]$ par :

$$(1.25) \quad F_A^n(k) = b_0(k) Q_A^n + \sum_{j=1}^2 b_j(k) Q_{jA} \quad \forall A \in \mathcal{A}_h, \forall k \in [0,1]$$

Cette fonction est le flux du champ $\vec{f}^n(x,k)$ défini en (1.13ter) à travers l'arête A :

$$(1.26) \quad F_A^n(k) = \int_A \vec{f}^n(\gamma,k) \cdot \vec{v}_A d\gamma \quad \forall A \in \mathcal{A}_h, \forall k \in [0,1]$$

Mais comme, pour k fixé, la composante normale de $\vec{f}^n(\gamma,k)$ sur A est constante le long de A (puisque \vec{q}_0^n, \vec{q}_1 et \vec{q}_2 sont dans \vec{X}_h^0),
Donc $F_A(k)$ s'écrit encore :

$$(1.27) \quad F_A^n(k) = \vec{f}^n(\gamma,k) \cdot \vec{v}_A \times \text{longueur}(A)$$

Ainsi la définition (1.13quarto) de la valeur de Godunov ξ en un point γ de l'arête A se réécrit :

$$(1.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{A}_h, \forall \gamma \in A \\ F_A^n(\xi(\gamma)) = \text{Signe}(S^{n+}(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) \min_{k \in I(S^{n+}(\gamma), S^{n-}(\gamma))} \{ \text{Signe}(S^{n+}(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) F_A^n(k) \} \\ \text{où } + \text{ et } - \text{ correspondent à l'aval et à l'amont par rapport à la} \\ \text{normale positive sur le côté A.} \end{array} \right.$$

Nous pouvons maintenant écrire commodément le débit d'eau à travers chaque arête A ; définissons pour cela une fonction de la saturation que nous appellerons "débit d'eau partiel" par :

$$(1.29) \quad QWP_A^n(k) = R_A^n + F_A^n(k) \quad \forall k \in [0,1]$$

Le nom de cette fonction est justifié par la formule suivante (qui découle de (1.13quarto) et de (1.27)) :

$$(1.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} QWP_A^n(\xi(\gamma)) = \vec{\varphi}_w^n \cdot \vec{v}_A(\gamma) \cdot \text{long } A \quad \forall \gamma \in A \quad \forall A \in \mathcal{A}_h \\ (QWP_A^n(\xi(\gamma))) \text{ est le débit d'eau qui traverserait l'arête } A \text{ s'il} \\ \text{était partout égal sur } A \text{ à sa valeur au point } \gamma \text{ de } A). \end{array} \right.$$

L'expression de $QWP_A^n(\xi(\gamma))$ est alors donnée, d'après la première équation de (1.13quarto), (1.27), (1.28), par :

$$(1.31) \quad QWP_A^n(\xi(\gamma)) = R_A^n + F_A^n(\xi(\gamma)) \quad \forall \gamma \in A, \forall A \in \mathcal{A}_h$$

On voit aussi que le débit d'eau total à travers l'arête A est

$$(1.32) \quad QW_A^n = \text{Moy}_A \{QWP_A^n(\xi(\gamma))\} = \text{moyenne sur } A \text{ de } QWP_A^n(\xi(\gamma))$$

Equations donnant R^n

L'équation (1.14) se réécrit :

$$(1.14\text{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{A}_h \quad R_A^n \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{p_{CM} d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx = \int_{\tilde{\Omega}} \alpha(S^n) \text{div } \vec{s}_B dx - \\ - \alpha(1) \int_{Bn(\Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2)} \vec{s}_B \cdot \vec{v} d\gamma \quad \forall B \in \mathcal{A}_h, B \notin \Gamma_{imp} \\ \text{où } \vec{v} \text{ est la normale extérieure à } \tilde{\Omega} \end{array} \right.$$

et l'équation (1.15) devient, en choisissant pour \vec{v} la normale positive sur A :

$$(1.15\text{bis}) \quad R_A^n = - \text{Moy}_A \{F_A^n(\bar{\xi})\} \quad \forall A \in \mathcal{A}_h, A \subset \Gamma_{imp}$$

où :

$$(1.16\text{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi} \text{ est déterminée, en tout point } \gamma \text{ de } A \subset \Gamma_{imp} \text{ par :} \\ F_A^n(\bar{\xi}) = Z_{A,K} \text{Signe}(S \text{ EXT}_A^{n-1} - S^n|_A) \cdot \\ \min_{k \in I(S \text{ EXT}_A^{n-1}, S^n|_A)} \{Z_{A,K} \text{Signe}(S \text{ EXT}_A^{n-1} - S^n|_A) F_A^n(k)\} \\ S^n|_A = \text{trace intérieure de } S^n \text{ sur } A \subset \Gamma_{imp} \end{array} \right.$$

Là encore, $\bar{\xi}$ donné par (1.16bis) est une approximation, obtenue par découplage en temps, du ξ donné par (1.28). On peut aussi remarquer que, dans (1.16bis), comme A est une arête imperméable, $\vec{q}_0 \cdot \vec{v}|_A = 0$ c.a.d. $Q_A^n = 0$ et donc le premier terme de F_A^n dans (1.25) est nul.

On peut aussi remarquer que, même si on ne découplait pas dans (1.16bis) (c'est-à-dire si on remplaçait $S \text{ EXT}_A^{n-1}$ par $S \text{ EXT}_A^n$), la condition (1.15bis) s'écrit :

$$QW_A^n = 0$$

c.a.d. traduirait seulement la nullité du débit d'eau total à travers l'arête A, ce qui n'implique pas (cf.(1.31)) que tous les débits partiels $QWP_A^n(\gamma)$ soient nuls le long de A.

Equations donnant $S \text{ EXT}^n$:

$$(1.17\text{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha(S \text{ EXT}_B^n) \int_B \vec{s}_B \cdot \vec{v} d\gamma = - \sum_{A \in \mathcal{A}_h} R_A^n \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{P_{CM} d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx \\ + \int_{\tilde{\Omega}} \alpha(S^n) \text{div} \vec{s}_B dx \quad \forall B \in \mathcal{A}_h, B \subset \Gamma_{\text{imp}} \\ \text{où } \vec{v} \text{ est la normale extérieure de } \tilde{\Omega} \end{array} \right.$$

Equations donnant S^{n+1}

En utilisant la notation (1.29), l'équation (1.8) se réécrit :

$$(1.18\text{bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{ns(K)} (S_{K,j}^{n+1} - S_{K,j}^n) \int_K \psi_{K,j} v_{K,i} dx = \\ \Delta t \sum_{A \subset \partial K} \int_K QWP_A^n(S^n(x)) \vec{s}_A(x) \cdot \nabla v_{K,i}(x) dx \\ - \Delta t \sum_{A \subset \partial K} Z_{A,K} \text{Moy}_A \{ QWP_A^n(\xi(\gamma)) v_{K,i}(\gamma) \} \\ \text{où l'on pose par définition} \\ QWP_A^n(\xi(\gamma)) \equiv 0 \quad \forall \gamma \in A \quad \forall A \subset \Gamma_{\text{imp}} \end{array} \right.$$

Rappelons que l'exclusion, dans le dernier terme de (1.18), des arêtes A de Γ_{imp} avait pour but d'avoir un bilan en eau exact, malgré les approximations faites (cf remarque après la formule (1.16bis)) dans l'approximation de la condition "débit d'eau nul" sur Γ_{imp} . On arrive au même résultat dans (1.18bis) en imposant, sur les arêtes A de Γ_{imp} , que les débits d'eau partiels $\text{QWP}_A^n(\xi(\gamma))$ soient nuls. Cette façon de représenter l'imperméabilité de Γ_{imp} a l'avantage de rester valable lorsqu'il n'y a pas de pression capillaire (il suffit alors de poser $\vec{r} \equiv 0$ et de sauter les étapes donnant R^n et SEXT).

Considérons d'abord le système (1.14bis), (1.15bis). On introduit $\tilde{A}R^n$ la matrice symétrique $(\tilde{A}R^n)_{A,B} : A, B \in \mathcal{A}_h$:

$$(1.33) \quad \tilde{A}R^n_{A,B} = \int_{\Omega} \frac{1}{P_{CM}^d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx$$

On définit ensuite AMOY^n la fonction de M_h^0 telle que :

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \text{AMOY}^n|_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \alpha(S^n) \, dx$$

et on note de la même façon le vecteur $\text{AMOY}^n = (\text{AMOY}_K^n)_{K \in \mathcal{T}_h}$ tel que :

$$\text{AMOY}_K^n = \text{AMOY}^n|_K$$

Comme $\vec{s}_B \in \vec{X}_h^0$, on a $\text{div } \vec{s}_B \in M_h^0$ et donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha(S^n) \text{div } \vec{s}_B \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \alpha(S^n) \, dx \times \int_K \text{div } \vec{s}_B \, dx \\ &= \int_{\Omega} \text{AMOY}^n \cdot \text{div } \vec{s}_B \, dx \end{aligned}$$

Introduisons le vecteur $\tilde{\text{FRA}}1 = (\tilde{\text{FRA}}1_A)_{A \in \mathcal{A}_h}$ tel que :

$$(1.34) \quad \tilde{\text{FRA}}1_A = \begin{cases} Z_{A,\Omega} \alpha(1) & \text{si } A \subset \Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2 \\ 0 & \text{si } A \not\subset \Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2 \end{cases}$$

et le vecteur :

$$(1.35) \quad \tilde{\text{FR}}^n = {}^t\text{DIV} \cdot \text{AMOY}^n - \tilde{\text{FRA}}1$$

On tient compte des relations (1.15bis) en modifiant localement les matrices $\tilde{A}R^n$ et le second membre $\tilde{\text{FR}}^n$ et on les notera après modification $\tilde{\tilde{A}}R^n$ et $\tilde{\tilde{\text{FR}}}^n$

Le système linéaire (1.14bis) (1.15bis) s'écrit donc sous forme matricielle :

$$(1.36) \quad \overline{AR}^n \cdot R^n = \overline{FR}^n$$

Concernant (1.17bis), on a simplement à inverser la fonction autant de fois qu'il y a d'arêtes dans Γ_{imp} .

En notant, pour tout $B \in \mathcal{A}_h$, $B \subset \Gamma_{imp}$

$$(1.37) \quad FEXT_B^n = AMOY_K^n - Z_{B,\tilde{\Omega}} \cdot AR_{A,B} \cdot R_A^n$$

où K est l'élément de \mathcal{C}_h adjacent à B , et où $AR_{A,B}$ est défini en (1.33).

Alors (1.17bis) s'écrit :

$$(1.38) \quad SEXT_B^n \alpha^{-1} (FEXT_B^n) \quad \forall B \in \mathcal{A}_h, B \subset \Gamma_{imp}$$

Les équations (1.18bis) sont une suite de petits systèmes linéaires de dimension $ns(K)$ associés à chaque élément K .

On introduit la matrice symétrique $ASK = (ASK_{i,j})_{i,j=1,\dots,ns(K)}$ telle que :

$$(1.39) \quad ASK_{i,j} = \int_K \varphi v_{K,j} v_{K,i} dx.$$

et le vecteur $\tilde{FSK}^n = (\tilde{FSK}_i^n)_{i=1,\dots,ns(K)}$ défini par :

$$(1.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{FSK}_i^n = \sum_{A \subset \partial K} \int_K QWP_A^n(S^n) \vec{s}_A \cdot \nabla v_{K,i} dx - Z_{A,K}^{Moy_A} \{QWP_A^n(\xi(\gamma)) v_{K,i}\} \\ \forall K \in \mathcal{C}_h, \forall i = 1, 2, \dots, ns(K), \text{ avec :} \\ QWP_A^n(\xi(\gamma)) = 0 \quad \forall \gamma \in A \quad \forall A \subset \Gamma_{imp} \end{array} \right.$$

Si on pose ;

$$SK^n = (SK_i^n)_{i=1,\dots,ns(K)} \text{ tel que } SK_i^n = S_{K,i}^n$$

l'équation (1.18bis) se réduit à :

$$(1.41) \quad ASK(SK^{n+1} - SK^n) = \Delta t \tilde{FSK}^n \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$$

REMARQUE

Dans le but de simplifier quelques formules en vue de la vectorisation des calculs, on peut introduire des triangles appelés "fictifs". A toute arête du bord $A \in \mathcal{A}_h \subset \partial\tilde{\Omega}$, on associe un triangle fictif que l'on note K_A et qui se trouve à l'extérieur du domaine $\tilde{\Omega}$. La réunion de ces éléments est notée \mathcal{T}_{hf} . On note encore \hat{P} et \hat{S} les vecteurs tels que :

$$\hat{P} = (P_K)_{K \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_{hf}}$$

$$S = (S_{Kj})_{K \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{T}_{hf}} \quad j = 1, \dots, ns(K)$$

Les conditions aux bords à pression imposée sont prises en compte en écrivant

$$P_{K_A} = P_{dA}, \quad \forall A \in \Gamma_w^1$$

et l'équation (1.12 bis) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx - (P_{K_B^-} - P_{K_B^+}) &= \\ &= \sum_{j=1}^2 \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_{jA} \int_{\tilde{\Omega}} \gamma_j(S^n) \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx \end{aligned}$$

$$\forall B \in \mathcal{A}_h, B \notin (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_w^2)$$

où K_B^- et K_B^+ sont les éléments, éventuellement fictifs, adjacents à l'arête B, quand on suppose que le sens positif de traversée de B va de K_B^- va K_B^+ .

De même les conditions aux bords à saturation imposée sur les frontières alimentées en eau sont prises en compte par :

$$S_{K_{A,j}} = 1 \quad \forall A \in \Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2, \quad j = 1, 2, 3,$$

et l'équation (1.14 bis) devient :

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_h} R_A^n \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{P_{CM} d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx = \frac{1}{\text{mes}(K_B)} \int_{K_B^1} \alpha(\hat{S}^n) dx$$

$$- \frac{1}{\text{mes}(K_B^2)} \int_{K_B^2} \alpha(\hat{S}^n) dx \quad \forall B \in \mathcal{A}_h, B \notin \Gamma_{\text{imp}}$$

De plus, K_A étant l'élément fictif d'une arête $A \subset \Gamma_{\text{imp}}$, on pose :

$$S_{K_A, j} = \text{SEXT}_A, \quad \forall A \subset \Gamma_{\text{imp}}, j = 1, 2, 3, \dots$$

et les équations (1.16 bis) prennent la même forme que (1.28) où S est remplacé par \hat{S} .

Ainsi l'introduction des éléments fictifs permet de ne plus avoir à distinguer informatiquement les arêtes sur le bord de $\tilde{\Omega}$ des arêtes intérieures.

1.7 - Intégration numérique

On calculera les intégrales sur chaque élément K par une formule d'intégration à $\text{npi}(K)$ points GK_i , $i=1, \dots, \text{npi}(K)$:

$$(1.42) \quad \int_K f(x) dx \approx \text{mes}(K) \sum_{\ell=1}^{\text{npi}(K)} \Theta_{K, \ell} f(GK_{\ell})$$

En pratique on prendra $\text{npi}(K) = 4$

Pour un triangle, les points GK_{ℓ} , $\ell=1, \dots, 4$, sont les points de coordonnées barycentriques respectives $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$, $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $\Theta_{K, \ell} = \frac{25}{48}$, $\ell=1, 3$, $\Theta_{K, 4} = \frac{9}{16}$.

Pour un parallélogramme les points GK_{ℓ} , $\ell=1, \dots, 4$ sont les 4 points de Gauss de coordonnées respectives

$$(\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})), (\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})), (\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})),$$

$$(\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})) \quad \text{et} \quad \Theta_{K, \ell} = \frac{1}{4}, \quad \ell=1, \dots, 4.$$

Ainsi la formule d'intégration sera exacte pour les polynômes P_3 si K est un triangle ou Q_3 si K est un parallélogramme.

Certains auteurs déconseillent l'utilisation de la formule d'intégration proposée ci-dessus pour les triangles car elle utilise un poids négatif. Dans le cas où on rencontrerait effectivement des difficultés il faudrait revenir, pour les triangles, à la formule d'intégration utilisant les milieux des côtés qui n'est exacte que pour les polynômes P_2 . En effet, la formule d'intégration exacte pour les polynômes P_3 avec des poids positifs exige 6 points d'intégration ce qui serait très coûteux.

Les intégrales sur chaque arête A seront calculées par une formule d'intégration à $npi(A)$ point GA_ℓ , $\ell = 1, \dots, npi(A)$

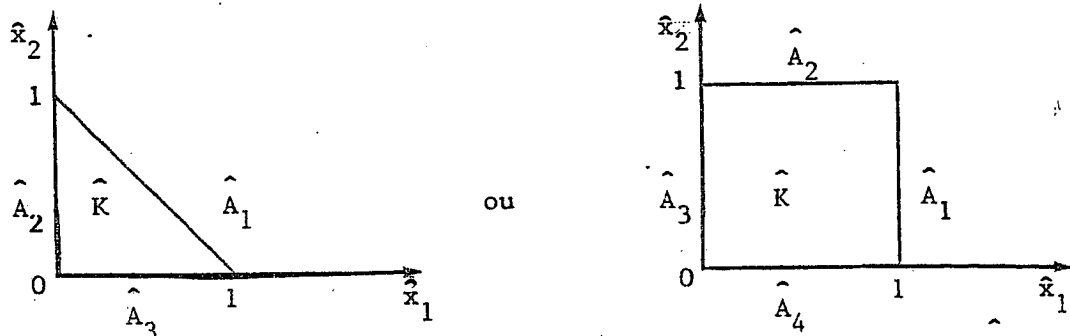
$$(1.44) \quad \int_A f(x) dx \approx \text{mes}(A) \sum_{\ell=1}^{npi(A)} \Theta_{A,\ell} f(GA_\ell)$$

En pratique on prendra :

$$(1.45) \quad npi(A) = 2 \quad ; \quad \Theta_{A,\ell} = \frac{1}{2}$$

et les deux points d'intégration seront les deux points de Gauss de l'arête. La formule d'intégration est alors exacte pour les polynômes de degré 3.

Notons \hat{K} l'élément de référence.



et notons F_K la transformation affine qui fait passer de \hat{K} à K :

$$(1.46) \quad x = F_K(\hat{x}) = B_K : \hat{x} + b_K$$

où B_K est une matrice 2×2 et $b_K \in \mathbb{R}^2$.

On notera,

$$(1.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_K = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ J_K = |\det B_K| = \begin{cases} \text{mes}(K) & \text{si } K \text{ est un parallélogramme} \\ 2\text{mes}(K) & \text{si } K \text{ est un triangle.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Introduisons les fonctions de base sur l'élément de référence :
Pour le triangle \hat{K} :

$$(1.48a) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \vec{s}_{A_1}(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{cases} & \vec{s}_{A_2}(\hat{x}) = \begin{cases} -1+\hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{cases} & \vec{s}_{A_3}(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{x}_1 \\ -1+\hat{x}_2 \end{cases} \\ \hat{v}_1(\hat{x}) = \hat{x}_1 & \hat{v}_2(\hat{x}) = \hat{x}_2 & \hat{v}_3(\hat{x}) = 1-\hat{x}_1-\hat{x}_2 \end{array} \right.$$

pour le carré \hat{K} :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \vec{s}_{A_1}(\hat{x}) = \begin{cases} \hat{x}_1 \\ 0 \end{cases} & \vec{s}_{A_2}(\hat{x}) = \begin{cases} 0 \\ \hat{x}_2 \end{cases} & \vec{s}_{A_3}(\hat{x}) = \begin{cases} -1+\hat{x}_1 \\ 0 \end{cases} & \vec{s}_{A_4}(\hat{x}) = \begin{cases} 0 \\ -1+\hat{x}_2 \end{cases} \\ \hat{v}_1(\hat{x}) = \hat{x}_1(1-\hat{x}_2) & \hat{v}_2(\hat{x}) = \hat{x}_1\hat{x}_2 & \hat{v}_3(\hat{x}) = \hat{x}_2(1-\hat{x}_1) & \hat{v}_4(\hat{x}) = (1-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2) \end{array} \right.$$

D'après [15] on sait que :

$$(1.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall A \in \mathcal{A}_h \quad \vec{s}_A|_K = Z_{A,K} \cdot \frac{1}{J_K} B_K \vec{s}_A \circ F_K^{-1} \\ \forall i = 1, \dots, ns(K) \quad v_{K,i} = \hat{v}_i \circ F_K^{-1} \end{array} \right.$$

où le triangle K et l'arête A sont les images respectives du triangles \hat{K} et de l'arête \hat{A} par la transformation F_K .

Montrons comment on calcule les intégrales que nous avons rencontrées.

Les calculs des coefficients de AD , ATJ , $J=1,2$, AR définies respec-

tivement par (1.20), (1.21), (1.33) étant analogues, prenons AD comme exemple.

D'après (1.20), on a :

$$AD_{A,B}^n = \int_K \frac{1}{d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx$$

si $A \neq B$ et A et B sont deux arêtes du même élément K ou si $A = B$ et $A \subset \partial\tilde{\Omega} \cap K$.

$$AD_{A,A}^n = \int_{K_1} \frac{1}{d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A \, dx + \int_{K_2} \frac{1}{d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A \, dx$$

si $A = B \neq \partial\tilde{\Omega}$ et $K_1 \cap K_2 = A$.

Dans les autres cas $AD_{A,B}^n = 0$.

Donc le calcul revient à évaluer l'intégrale :

$$\int_K \frac{1}{d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx$$

où A et B sont deux arêtes de K avec éventuellement $A = B$.

Introduisons les notations :

$$\vec{s}_A = (s_{A1}, s_{A2}), \quad \hat{S} = S \circ F_K$$

et supposons que Ψ a été approché de façon constante par élément.

Alors en utilisant (1.47), (1.49) il est facile de vérifier que :

$$(1.50) \quad \int_K \frac{1}{d(S)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx = \frac{Z_{AK} Z_{BK}}{J_K} \left\{ \left(\frac{b_{11}^2}{\Psi_{1|K}} + \frac{b_{21}^2}{\Psi_{2|K}} \right) \int_{\hat{K}} \frac{1}{d(\hat{S})} \hat{s}_{A1} \cdot \hat{s}_{B1} \, d\hat{x} \right. \\ + \left(\frac{b_{11} b_{12}}{\Psi_{1|K}} + \frac{b_{21} b_{22}}{\Psi_{2|K}} \right) \int_K \frac{1}{d(\hat{S})} (\hat{s}_{A1} \cdot \hat{s}_{B1} + \hat{s}_{A2} \cdot \hat{s}_{B1}) \, dx \\ \left. + \left(\frac{b_{12}^2}{\Psi_{1|K}} + \frac{b_{22}^2}{\Psi_{2|K}} \right) \int_K \frac{1}{d(\hat{S})} \hat{s}_{A2} \cdot \hat{s}_{B2} \, dx \right\}$$

Introduisons le tableau AE de dimension AE(3,ne) tel que :

$$(1.51) \quad \left\{ \begin{aligned} AE(1,K) &= \frac{1}{J_K} \cdot \left(\frac{b_{11}^2}{\Psi_1|K} + \frac{b_{21}^2}{\Psi_1|K} \right) \\ AE(2,K) &= \frac{1}{J_K} \cdot \left(\frac{b_{11}b_{12}}{\Psi_1|K} + \frac{b_{21}b_{22}}{\Psi_2|K} \right) \\ AE(3,K) &= \frac{1}{J_K} \cdot \left(\frac{b_{12}^2}{\Psi_1|K} + \frac{b_{22}^2}{\Psi_2|K} \right) \end{aligned} \right.$$

Pour calculer les intégrales présentes dans le membre de droite de (1.50) on utilise la formule d'intégration (1.42) et comme $\hat{S}(\hat{GK}_\ell) = S(GK_\ell)$ on a :

$$\begin{aligned} \int_K \frac{1}{d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx &\approx \left[AE(1,K) \sum_{\ell=1}^{npi(K)} \frac{mes(\hat{K})}{d(S(GK_\ell))} \times \Theta_{K,\ell}(\hat{s}_{A1} \hat{s}_{B1})(\hat{GK}_\ell) \right. \\ &+ AE(2,K) \cdot \sum_{\ell=1}^{npi(K)} \frac{mes(\hat{K})}{d(S(GK_\ell))} \Theta_{K,\ell}(\hat{s}_{A1} \hat{s}_{B2} + \hat{s}_{A2} \hat{s}_{B1})(\hat{GK}_\ell) \\ &\left. + AE(3,K) \cdot \sum_{\ell=1}^{npi(K)} \frac{mes(\hat{K})}{d(S(GK_\ell))} \Theta_{K,\ell}(\hat{s}_{A2} \hat{s}_{B2})(\hat{GK}_\ell) \right] Z_{A,K} \cdot Z_{B,K} \end{aligned}$$

Introduisons le tableau PSK de dimension $ns(\hat{K}), ns(\hat{K}), 3, npi(\hat{K})$:

$$(1.52) \quad \left\{ \begin{aligned} PSK(\hat{A}, \hat{B}, 1, \ell) &= mes\hat{K} \cdot \Theta_{K,\ell}(\hat{s}_{A1} \cdot \hat{s}_{B1})(\hat{GK}_\ell) \\ PSK(\hat{A}, \hat{B}, 2, \ell) &= mes\hat{K} \cdot \Theta_{K,\ell}(\hat{s}_{A1} \cdot \hat{s}_{B2} + \hat{s}_{A2} \cdot \hat{s}_{B1})(\hat{GK}_\ell) \\ PSK(\hat{A}, \hat{B}, 3, \ell) &= mes\hat{K} \cdot \Theta_{K,\ell}(\hat{s}_{A2} \cdot \hat{s}_{B2})(\hat{GK}_\ell) \end{aligned} \right.$$

En pratique il y aura deux tableaux PSK, l'un pour le triangle de référence et l'autre pour le carré de référence (et $PSK(\hat{A}, \hat{B}, i, \ell) = PSK(\hat{B}, \hat{A}, i, \ell)!$).

On obtient donc la formule :

$$(1.53) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_K \frac{1}{d(S^n)} \Psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx &\approx Z_{AK} Z_{BK} \sum_{i=1}^3 AE(i,K) \sum_{\ell=1}^{npi(K)} \frac{1}{d(S^n(GK_\ell))} PSK(\hat{A}, \hat{B}, i, \ell) \\ \text{où } \hat{A}, \hat{B} &\text{ sont les côtés de l'élément de référence, antécédents de A, B} \\ &\text{dans la transformation } F_K. \end{aligned} \right.$$

On note que les tableaux AE et \hat{PSK} sont indépendants du pas de temps. De la même façon pour calculer AFJ donnés par (1.21) on utilisera la formule d'intégration.

$$(1.54) \quad \int_K \gamma_j(S) \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \approx Z_{A,K} Z_{B,K} \sum_{i=1}^3 AE(i,K) \sum_{\ell=1}^{npi(K)} \gamma_j(S(GK_\ell)) \cdot \hat{PSK}(\hat{A}, \hat{B}, i, \ell)$$

$j = 1, 2.$

En ce qui concerne AR donné par (1.33), afin d'éviter l'apparition de saturations négatives ou plus petites que 1, on utilisera une formule d'intégration moins précise, celle utilisant les valeurs aux sommets. De plus, étant donné qu'en cas d'imbibition pure, sans aucune convection, i.e., $\vec{q}_j = 0$, $j = 0, 1, 2$, les saturations calculées sont en fait constantes par morceaux, on n'utilisera dans la formule d'intégration que la valeur moyenne de la saturation dans l'élément. On note

$S_K = \frac{1}{ns(K)} \sum_{i=1}^{ns(K)} S_{K,i}$ la valeur moyenne de la saturation dans l'élément K et PK_i , $i=1, \dots, ns(K)$ les sommets de l'élément K. Alors on utilisera la formule :

$$(1.55) \quad \int_K \frac{1}{P_{CM|K}} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx \approx \frac{Z_{A,K} Z_{B,K}}{P_{CM|K} d(\bar{S}_K^n)} \times$$

$$\begin{aligned} & [AE(1,K) \sum_{\ell=1}^{ns(K)} \text{mes}(\hat{K}) (\hat{s}_{A1} \cdot \hat{s}_{B1}) PK_\ell) \\ & + AE(2,K) \sum_{\ell=1}^{ns(K)} \text{mes}(\hat{K}) (\hat{s}_{A1} \cdot \hat{s}_{B2} + \hat{s}_{A2} \cdot \hat{s}_{B1}) (PK_\ell) \\ & + AE(3,K) \sum_{\ell=1}^{ns(K)} \text{mes}(\hat{K}) (\hat{s}_{A2} \cdot \hat{s}_{B2}) (PK_\ell)]. \end{aligned}$$

Une autre intégrale délicate à calculer est $\int_K QWP_A(S) \vec{s}_A \cdot \nabla v_{K,i} dx$ qui intervient dans (1.40).

Grâce à (1.49), (1.42) et comme $S(GK_\ell) = \hat{S}(G\hat{K}_\ell)$ on a :

$$\begin{aligned} \int_K QWP_A(S) \vec{s}_A \cdot \nabla v_{K,i} dx &= Z_{A,K} \int_{\hat{K}} QWP_A(\hat{S}) \vec{\hat{s}}_A \cdot \nabla \hat{v}_i d\hat{x} \\ &= Z_{AK} \text{mes}(\hat{K}) \sum_{\ell=1}^{npi(K)} \Theta_{\hat{K},\ell} QWP_A(S(GK_\ell)) \vec{\hat{s}}_A \cdot \nabla \hat{v}_i(G\hat{K}_\ell) \end{aligned}$$

Définissons le tableau $AEG\hat{K}$ de dimension $AEG\hat{K}(npi(\hat{K}), ns(\hat{K}), ns(\hat{K}))$ par :

$$\begin{aligned} (1.56) \quad AEG\hat{K}(\ell, A, i) &= \text{mes}(\hat{K}) \Theta_{\hat{K},\ell} \vec{\hat{s}}_A \cdot \nabla \hat{v}_i(G\hat{K}_\ell) \\ \ell &= 1, \dots, npi(K), \quad \forall \hat{A} \subset \partial\hat{K}, \quad i = 1, \dots, ns(\hat{K}) \end{aligned}$$

Dans la pratique, il y a évidemment deux tableaux $AEG\hat{K}$, l'un pour le triangle de référence et l'autre pour le carré de référence.

Avec ces notations, on obtient donc :

$$(1.57) \quad \int_K QWP_A(S) \vec{s}_A \cdot \nabla v_{K,i} dx \approx Z_{AK} \sum_{\ell=1}^{npi(K)} AEG\hat{K}(\ell, \hat{A}, i) \cdot QWP_A(S(GK_\ell))$$

Quant à la matrice ASK définie en (1.39), on la calcule exactement :

$$(1.58) \quad \text{ASK}_{i,j} = \phi_K J_K \int_K \hat{v}_i \hat{v}_j d\hat{w} = \phi_K J_K \hat{\text{ASK}}_{i,j}$$

et plus précisément on a besoin de son inverse (cf. (1.41)) qui est :

$$\text{ASK}^{-1} = \frac{1}{J_K \cdot \phi_K} \hat{\text{ASK}}^{-1}$$

REMARQUE

Les calculs précédents ont été faits en utilisant la transformation (1.49). Cela n'est pas indispensable. On peut aussi faire les calculs directement en utilisant une expression explicite des fonctions de base de l'élément courant. Une telle expression est obtenue en utilisant les coordonnées barycentriques par rapport aux trois sommets pour les triangles, et les coordonnées dans un repère lié à deux côtés non parallèles pour les parallélogrammes.

1.8 - Récapitulation

A - Prélabement à la boucle en temps

1 - Construire

- le tableau AE défini en (1.51),
- les tableaux PSK et AEGK définis en (1.52) et (1.56),
- le tableau DIV définis en (1.19)

2 - Déterminer

- le paramètre ω d'augmentation du Lagrangien augmenté pour les équations en pression.

3 - Calculer

- les vecteurs Q_1 et Q_2
- une saturation initiale

B - Données à l'instant t^n

$$1 - S^n = (S_{K,i}^n), \quad i = 1, \dots, ns(K), \quad K \in \mathcal{T}_h$$

$$2 - S_{\Gamma_{imp}}^{n-1} = (SEXT_B^{n-1})_{B \in \Gamma_{imp}}$$

$$3 - P^{n-1} = (P_K^{n-1}), \quad K \in \mathcal{T}_h$$

C - Calcul de (P^n, Q^n)

Successivement :

- 1 - En même temps, construire la matrice \tilde{AD}^n définie en (1.20) en utilisant la formule (1.53), construire la matrice \tilde{AR}^n définie en (1.33) en utilisant la formule (1.55), et calculer $\tilde{A}\tilde{\Gamma}^n Q_1 + \tilde{A}\tilde{\Gamma}^n Q_2$.
- 2 - Former le second membre \tilde{FQ} des équations en pression donné par la formule (1.23).
- 3 - Entrer les conditions aux limites de débit imposé sur Γ_{imp} et Γ_w^2 , c'est-à-dire modifier \tilde{AD}^n et \tilde{FQ}^n en \tilde{AD}^n et \tilde{FQ}^n .
- 4 - Construire la matrice $\tilde{AD}^n + \omega^t \text{DIV} \cdot \text{DIV}$ et la matrice de préconditionnement si nécessaire (on ne préconditionne évidemment pas à chaque pas de temps, mais seulement quand les itérations de gradient conjugué deviennent trop nombreuses).
- 5 - Effectuer alors les itérations de Lagrangien augmenté, ci-dessous k étant l'indice des itérations.
 - $p^{n,0} = p^{n-1}$
 - $p^{n,k}$ étant donné, calculer $Q^{n,k}$ en résolvant le système linéaire : $(\tilde{AD}^n + \omega^t \text{DIV} \cdot \text{DIV}) Q^{n,k} = \tilde{t}_{\text{DIV}} p^{n,k} + \tilde{FQ}^n$.
 - calculer ensuite $p^{n,k+1}$ par :

$$p^{n,k+1} = p^{n,k} - \omega \text{DIV} Q^{n,k}$$
 - poser $p^n = p^{n,k}$ lorsqu'un test de convergence est satisfait

D - Calcul de R^n , $S_{\Gamma_{imp}}^n$

1 - Calculer le second membre \tilde{FR} défini par (1.35), et construire la matrice de préconditionnement associée à AR^n .

2 - Entrer les conditions de flux capillaire imposé (1.15bis) sur Γ_{imp} pour chaque arête $A \in \Gamma_{imp}$:

- calculer $F_A^n(\xi(GA_1))$ $i = 1, \dots, npi(A)$ par (1.16bis)
- calculer $Moy_A \{F_A^n(\xi)\} = \frac{1}{2} (F_A^n(\xi(GA_1)) + F_A^n(\xi(GA_2)))$
- modifier \tilde{AR}^n et \tilde{FR}^n en \overline{AR}^n et \overline{FR}^n de façon à tenir compte de (1.15bis) c'est-à-dire $R_A^n = Moy_A \{F_A^n(\xi)\}$

3 - Résoudre le système linéaire

$$\overline{AR}^n R^n = \overline{FR}^n$$

4 - Calculer $FEXT^n$ donné par (1.37).

5 - Résoudre, pour chaque $B \in \Gamma_{imp}$, l'équation à une variable réelle :

$$SEXT_B^n = \alpha^{-1} (FEXT_B^n)$$

Noter qu'en l'absence de pression capillaire, il suffit de poser $R^n \equiv 0$ et de sauter l'étape D.

E - Calcul de S^{n+1}

S^n est calculé par l'équation (1.41) dont le second membre \tilde{FSK} est donné par (1.40).

On calcule le second membre \tilde{FSK} en effectuant une boucle sur les arêtes A de \mathcal{A}_h . On initialise donc \tilde{FSK} à zéro :

$$\tilde{FSK}_i = 0 \quad \forall K \in \mathcal{C}_h \quad \forall i = 1, 2, \dots, ns(K).$$

Puis, pour chaque arête A de \mathcal{A}_h , on procède de la façon suivante :

1 - Former la fonction de la saturation k :

$$F_A^n(k) = b_0(k) Q_A^n + \sum_{j=1}^2 b_j(k) Q_j^n$$

2 - Déterminer les éléments K^+ et K^- adjacents à A, K^+ (resp étant l'élément aval (resp. amont) par rapport à \vec{v}_A (\vec{v}_A fixant le sens positif de traversée de A).

3 - Calculer les débits d'eau partiels $QWPA_\ell$, $\ell = 1, \dots, \text{mpi}(A)$ aux deux points de Gauss de l'arête A :

a) si $A \in \Gamma_{\text{imp}}$ $QWPA_\ell = 0$ $\ell = 1, \dots, \text{mpi}(A)$

b) si $A \notin \Gamma_{\text{imp}}$ on utilise (1.31) avec $\gamma = GA_i$, $i = 1, \dots, \text{mpi}(A)$

on pose : $\text{SIGNE} = \text{signe} (S^{n+}(GA_i) - S^{n-}(GA_i))$

$K_{\text{MIN}} = \text{Min} \{S^{n+}(GA_i), S^{n-}(GA_i)\}$

$K_{\text{MAX}} = \text{Max} \{S^{n+}(GA_i), S^{n-}(GA_i)\}$

On détermine $QWPA_i = \text{SIGNE} * \text{Min} \left\{ \text{SIGNE} * F_A^n(k) \right\}$ $i=1, \dots, \text{mpi}(A)$
 $k \in [K_{\text{MIN}}, K_{\text{MAX}}]$

On pose,

$$QWPA_i = QWPA_i + R_A^n \quad i=1, \dots, \text{mpi}(A)$$

(On a alors, comme sous produit du calcul, le débit d'eau à travers l'arête A que l'on peut stocker éventuellement pour impression :

$$QW_A^n = \sum_{\ell=1}^{\text{mpi}(A)} \Theta_{A\ell} QWPA_\ell$$

Ces quantités ne sont pas requises pour la suite des calculs).

4 - Calculs des contributions de l'arête A à FSK^+ et FSK^- :

a) calculer les "débits partiels d'eau" QWPK aux points de de l'élément K :

$$QWPK_{\ell} = QWP_A^n(S^n(GK_{\ell})) \quad \ell=1, \dots, npi(K)$$

b) pour chaque sommet i de l'élément K, la contribution de l'arête A est donnée par (1.40) qui se réécrit :

$$F\tilde{SK}_i = F\tilde{SK}_i + Z_{AK} \sum_{\ell=1}^{npi(K)} AEGK(\ell, \hat{A}, i) \cdot QWPK_{\ell}$$

$$- Z_{AK} \sum_{\ell=1}^{npi(A)} \Theta_{A\ell} \cdot QWPA_{\ell} \cdot v_{K,i}(GA_{\ell})$$

$$\forall i=1, \dots, ns(K)$$

Noter que la dernière somme est la même pour les deux éléments K^+ et K^- et peut donc n'être calculée qu'une seule fois.

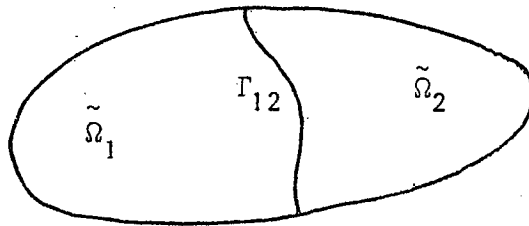
5 - Lorsque la boucle sur les éléments de A est déterminée, les seconds membres $F\tilde{SK}_i$, $i = 1, \dots, ns(K)$, $K \in \mathcal{T}_h$ sont calculés. Il ne reste plus qu'à résoudre, pour chaque élément K de \mathcal{T}_h , le système linéaire de dimension $ns(K)$:

$$ASK(SK^{n+1} - SK^n) = \Delta t F\tilde{SK}$$

II - MODELE A PLUSIEURS TYPES DE ROCHES

Pour simplifier les notations, on se contentera d'un cas avec deux types de roche seulement. Soit $\tilde{\Omega}$ un gisement et deux zones $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$ correspondant à deux types de roche différents.

On note $\Gamma_{12} = \partial\tilde{\Omega}_1 \cap \partial\tilde{\Omega}_2$ et $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Omega}_2 \cap \Gamma_{12}$



Pour chaque zone, un jeu de données physiques est fourni et il lui correspond un ensemble de fonctions de l'espace et de fonctions de la saturation qui seront notées avec l'indice de la zone en indice supérieur.

On prolonge de façon évidente chacune de ces fonctions à tout le domaine en disant que dans la zone de définition, elle est égale à la fonction prolongée. Les fonctions prolongées n'auront pas d'indice supérieur. Ainsi pour α :

$$\forall x \in \tilde{\Omega} \quad \alpha(S(x)) = \alpha^i(S^i(x)), \quad i = 1, 2. \quad \text{lorsque } x \in \tilde{\Omega}_i$$

Bien noter qu'avec cette équation :

$$(2.1) \quad \begin{cases} P_{CM}(x) = P_{CM}^i(x) & \text{dès que } x \in \tilde{\Omega}^i \\ \vec{q}_2(x) = \vec{q}_2^i(x) & \text{dès que } x \in \tilde{\Omega}^i \end{cases}$$

et donc que, vu la discontinuité possible de P_{CM}^1 et P_{CM}^2 sur Γ_{12}

$$(2.2) \quad \vec{q}_2(x) \neq \nabla P_{CM}(x)$$

Les équations s'écrivent dans chaque zone $\tilde{\Omega}_i$, $i = 1, 2$:

$$(2.3) \quad \text{div } \vec{q}_0^i = 0$$

$$(2.4) \quad \vec{q}_0^i = - \psi^i d^i(S^i) \nabla P^i + d^i(S^i) \sum_{j=1}^2 \gamma_j^i(S^i) \vec{q}_j^i$$

$$(2.5) \quad \psi^i \frac{\partial S^i}{\partial t} + \text{div}(\vec{r}^i + \sum_{j=0}^2 b_j^i(S^i) \vec{q}_j^i) = 0$$

$$(2.6) \quad \vec{r}^i = - \psi^i P_{CM}^i d_i^i(S_i) \nabla \alpha^i(S^i)$$

On reprend les conditions aux limites (1.5), ..., (1.10) du paragraphe précédent et une saturation est donnée à l'instant initial dans $\tilde{\Omega}$.

Il est à noter que la saturation S n'est plus, en général, continue (même en présence de capillarité) sur la frontière Γ_{12} séparant les deux types de roche. En effet, la continuité de la pression capillaire $P_w - P_o$ impose sur Γ_{12} la relation :

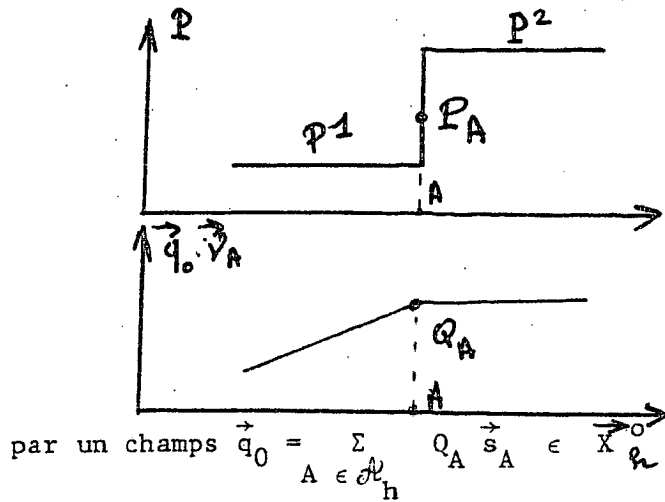
$$(2.7) \quad P_{CM}^1(x) p_c^1(S^1) = P_w - P_o = P_{CM}^2(x) p_c^2(S^2) \quad \forall x \in \Gamma_{12}$$

De même, la pression globale P n'est plus continue sur Γ_{12} , car la continuité des pressions eau et huile impose la relation

$$(2.8) \quad P^1 - P_{CM}^1(x) \gamma^1(S^1) = \frac{1}{2} (P_w + P_o) = P^2 - P_{CM}^2(x) \gamma^2(S^2) \quad \forall x \in \Gamma_{12}$$

Il faut donc modifier les équations trouvées au §I dans le cas d'un seul type de roche, de façon à ce qu'elles représentent dans chaque $\tilde{\Omega}_i$, les équations (2.3 à 6), et vérifient les équations (2.7), (2.8) (ce qui assurera la continuité des pressions eau et huile d'un type de roche à l'autre) et la continuité du débit global d'eau à travers Γ_{12} (ce qui assurera la continuité des débits d'eau et d'huile).

Le champs des débits totaux \vec{q}_0 ayant un flux continu à travers Γ_{12} , il est naturel de l'approcher, comme précédemment,



Exemple pour une arête $A \in \Gamma_{12}$

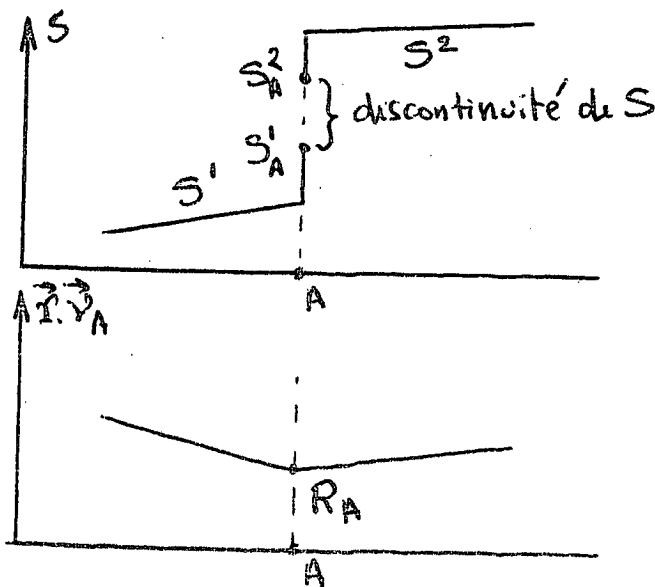
P_A est un nombre qui approche la trace sur A de la fonction (continue) P

Par contre, le champs \vec{r} des débits capillaires, qui est par définition

$$(2.9) \quad \vec{r}(x) = -\psi^i(x) P_{CM}^i(x) d^i(S^i(x, +) \nabla \alpha^i(S^i(x))) \quad \text{dès que } x \in \tilde{\Omega}_i$$

pourrait être approché par $\vec{r}^1 = \sum_{A \in \Gamma_{12}} R_A^1 \vec{s}_A$ dans $\tilde{\Omega}_1$ et par $\vec{r}^2 = \sum_{A \in \Gamma_{12}} R_A^2 \vec{s}_A$ dans $\tilde{\Omega}_2$, ce qui conduirait à calculer deux valeurs R_A^1 et R_A^2 sur les arêtes A de Γ_{12} . Par suite de la continuité du débit d'eau à travers A, ceci nécessiterait, en présence de pression capillaire, de calculer deux valeurs distinctes de $F_A^n(\xi)$ (cf (1.25)) sur A, alors qu'il n'en faudrait qu'une seule en absence de pression capillaire.

Afin de simplifier (un peu) la formulation, et pour que le cas "sans pression capillaire" soit un cas particulier du cas "avec pression capillaire", on décide d'approcher \vec{r} par $\vec{r} = \sum_{A \in \Gamma_{12}} R_A \vec{s}_A \in \vec{X}_h^0$: il n'y aura donc, sur chaque arête A (y compris situés sur Γ_{12}) qu'une seule valeur R_A du flux capillaire



Exemple pour une arête $A \in \Gamma_{12}$

S_A^1 et S_A^2 sont deux nombres qui approchent la trace sur A respectivement de S^1 et de S^2 . leur différence $S_A^1 - S_A^2$ approche la discontinuité de S sur A.

Enfin, nous conserverons pour S et P les espace d'approximations (resp. M_h^1 et M_h^0) utilisés précédemment.

2.1 - Voyons maintenant les modifications à apporter aux équations approchées du § 1.2

Pour toute fonction θ discontinue au passage de Γ_{12} , on introduit son saut sur Γ_{12} par :

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\theta]_2^1 = \theta^1 - \theta^2 \\ \text{où } \theta^j = \text{trace de } \theta \text{ sur } \Gamma_{12} \text{ du côté de } \tilde{\Omega}_j \end{array} \right.$$

. Comme on l'a remarqué précédemment en (2.2), il faut d'abord modifier l'équation donnant le champs \vec{q}_2 , qui devient :

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\tilde{\Omega}} \Psi^{-1} \vec{q}_2 \cdot \vec{s} = \int_{\tilde{\Omega}} P_{CM} \operatorname{div} \vec{s} - \int_{\partial \tilde{\Omega}} P_{CM} \vec{s} \cdot \vec{v} \\ \quad - \int_{\Gamma_{12}} [P_{CM}]_2^1 \vec{s} \cdot \vec{v}_1 \quad \forall \vec{s} \in \tilde{X}_h^0 \\ \text{où } \vec{v} \text{ est la normale extérieure à } \tilde{\Omega} \text{ et } \vec{v}_1 \text{ celle extérieure à } \tilde{\Omega}_1. \end{array} \right.$$

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\tilde{\Omega}_1} \Psi^{-1} \vec{q}_2 \cdot \vec{s}_1 - \int_{\tilde{\Omega}_2} \Psi^{-1} \vec{q}_2 \cdot \vec{s}_2 = \int_{\tilde{\Omega}_1} P_{CM}^1 \operatorname{div} \vec{s}_1 - \int_{\tilde{\Omega}_2} P_{CM}^2 \operatorname{div} \vec{s}_2 \\ \quad - \int_{\Gamma_{12}} \{P_{CM}^1 + P_{CM}^2\} \vec{s}_1 \cdot \vec{v}_1 \\ \forall \vec{s}_1 \in \tilde{X}_h^0(\tilde{\Omega}_1), \forall \vec{s}_2 \in \tilde{X}_h^0(\tilde{\Omega}_2) \text{ tels que} \\ \quad \vec{s}_j \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \partial \tilde{\Omega}_j / \Gamma_{12} \quad j = 1, 2 \\ \quad \vec{s}_1 \cdot \vec{v}_1 = - \vec{s}_2 \cdot \vec{v}_1 \text{ sur } \Gamma_{12} \\ \text{où } \vec{v}_1 = \text{normale extérieure à } \tilde{\Omega}_1. \end{array} \right.$$

Le seul terme supplémentaire, dans (2.11), par rapport au cas d'un seul type de roche est l'intégrale sur Γ_{12} du saut de P_{CM} . L'équation (2.11) détermine complètement \vec{q}_2 dès que le saut $\llbracket P_{CM} \rrbracket$ de la pression capillaire sur Γ_{12} est connu.

Mais alors l'équation (2.12) détermine la valeur moyenne des deux traces de la pression capillaire sur Γ_{12} . Ceci est dû au choix que l'on a fait de n'avoir qu'une valeur de $\vec{q}_2 \cdot \vec{v}$ sur Γ_{12} (et non une valeur à gauche et une autre à droite), qui interdit de fixer indépendamment le saut et la valeur moyenne des pressions capillaires sur Γ_{12} .

On aura exactement la même situation pour les champs \vec{q}_0 et \vec{r} .

On remarquera que lorsque P_{CM} prend des valeurs constantes, mais différentes, dans $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$, alors la solution \vec{q}_2 de (2.11), (2.12) est identiquement nulle (ce qui était encore plus évident d'après sa définition (2.1)).

Par contre l'équation donnant \vec{q}_1 est inchangée, donnons la pour mémoire :

$$(2.13) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \psi^{-1} \vec{q}_1 \cdot \vec{s} = \int_{\Omega} P_G \operatorname{div} \vec{s} - \int_{\partial\Omega} P_G \vec{s} \cdot \vec{v} & \forall \vec{s} \in \vec{X}_h^0 \\ \text{où } \vec{v} \text{ est la normale extérieure à } \tilde{\Omega} \end{cases}$$

.. équations donnant (P^n, q^n)

Par suite de la continuité du débit global \vec{q}_0 sur Γ_{12} , l'équation (1.11) reste inchangée :

$$(1.11) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{q}_0^n \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in M_h^0$$

Par contre l'équation (1.12), qui exprime que \vec{q}_0 approche $\bar{\nabla} P$ à l'intérieur de chaque Ω_i , va faire intervenir le saut de P sur Γ_{12} , c.a.d. d'après (2.8) le saut de $P_{CM}^j \gamma^j(S^j)$:

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{q}_0^n \cdot \vec{s} \, dx - \int_{\Omega} P^n \operatorname{div} \vec{s} &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 \gamma_j(S^n) \psi^{-1} \vec{q}_j^n \cdot \vec{s} \, dx - \int_{\Gamma_w} P_d^n \vec{s} \cdot \vec{v} \, d\gamma \\ &- \int_{\Gamma_{12}} [P_{CM}^\gamma(S)]_2^1 \vec{s} \cdot \vec{v}_1 \, d\gamma \\ \forall \vec{s} \in \vec{X}_h^0, \vec{s} \cdot \vec{v} &= 0 \text{ sur } \Gamma_{imp} \text{ et } \Gamma_w^2 \end{aligned} \right.$$

Les conditions aux limites sont inchangées :

$$(1.13) \quad \vec{q}_0^n \cdot \vec{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_{imp}, \quad \vec{q}_0^n \cdot \vec{v} = q_d^n \text{ sur } \Gamma_w^2$$

(on pourrait aussi écrire une équation du genre de (2.12) qui donnerait la valeur moyenne des deux traces de P sur Γ_{12})

Les équations (1.11), (2.14), (1.13) déterminent parfaitement \vec{q}_0^n et P^n dès que $[P_{CM}^\gamma(S)]_2^1$ est connu. Ceci implique de connaître les "traces" $S_{\Gamma_{12}}^{1n}$ et $S_{\Gamma_{12}}^{2n}$ de S^n de part et d'autre de Γ_{12} . Or ces "traces", (comparables à la trace $S_{\Gamma_{imp}}^n$ sur le bord imperméable), ne pourront être calculées que simultanément à $\vec{r}_{\Gamma_{imp}}^{1n}$ (en effet $S_{\Gamma_{12}}^{1n}$ est différent de la trace sur Γ_{12} de la restriction de S^1 à K , comme on le voit sur la figure de la p.33).

La prise en compte de plusieurs types de roche introduit donc un couplage entre les équations en pression et celles en saturation.

. équations donnant $\vec{r}^n, S_{\Gamma_{12}}^{1n}, S_{\Gamma_{12}}^{2n}, S_{\Gamma_{imp}}^n$:

Le champ capillaire \vec{r}^n étant (cf.(2.9)) le gradient, à l'intérieur de chaque $\tilde{\Omega}_i$, de la fonction $\alpha(S)$ discontinue sur Γ_{12} , l'équation (1.14) est remplacée par les deux équations :

$$(2.15) \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{P_{CM} d(S^n)} \psi^{-1} \vec{r}^n \cdot \vec{s} \, dx &= \int_{\Omega} \alpha(S^n) \operatorname{div} \vec{s} \, dx - \int_{\Gamma_W^1 \cup \Gamma_W^2} \alpha(l) \vec{s} \cdot \vec{v} \, dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_{12}} [\alpha(S^n)]_2^1 \vec{s} \cdot \vec{v}_1 \\ \text{où } [\alpha(S^n)]_2^1 &= \alpha^1(S_{\Gamma_{12}}^{1n}) - \alpha^2(S_{\Gamma_{12}}^{2n}) \\ \vec{v}_1 &= \text{normale extérieure à } \tilde{\Omega}_1 \end{aligned} \right.$$

et

$$(2.16) \left\{ \begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}_1} \frac{1}{P_{CM} d(S^n)} \psi^{-1} \vec{r}^n \cdot \vec{s}_1 &- \int_{\tilde{\Omega}_2} \frac{1}{P_{CM} d(S^n)} \psi^{-1} \vec{r}^n \cdot \vec{s}_2 = \int_{\tilde{\Omega}} \alpha(S^n) \operatorname{div} \vec{s}_1 - \int_{\tilde{\Omega}_2} \alpha(S^n) \operatorname{div} \vec{s}_2 \\ &\quad - \int_{\Gamma_{12}} \{ \alpha^1(S_{\Gamma_{12}}^{1n}) + \alpha^2(S_{\Gamma_{12}}^{2n}) \} \vec{s}_1 \cdot \vec{v}_1 \\ \forall \vec{s}_1 \in \tilde{X}_h^0(\tilde{\Omega}_1), \forall \vec{s}_2 \in \tilde{X}_h^0(\tilde{\Omega}_2), &\text{ tels que} \\ \vec{s}_j \cdot \vec{v} &= 0 \quad \text{sur } \partial \tilde{\Omega}_j / \Gamma_{12} \quad j = 1, 2 \\ \vec{s}_1 \cdot \vec{v}_1 &= - \vec{s}_2 \cdot \vec{v}_1 \quad \text{sur } \Gamma_{12} \\ \text{où } \vec{v}_1 &= \text{normale extérieure à } \tilde{\Omega}_1. \end{aligned} \right.$$

auxquelles il convient de rajouter la condition de continuité de la pression capillaires :

$$(2.17) \quad P_{CM}^1 P_c^1(S_{\Gamma_{12}}^{1n}) = P_{CM}^2 P_c^2(S_{\Gamma_{12}}^{2n})$$

Les équations (2.15) à (2.17), plus les conditions aux limites (1.15), (1.16) sur Γ_{imp} , inchangées, forment un système non linéaire déterminant
 $\vec{r}^n = (R_A^n, A \in \mathcal{A}_h)$ et $S_{\Gamma_{12}}^{jn} = (S_A^{jn}, A \in \mathcal{A}_h, A \subset \Gamma_{12}), j = 1, 2.$

On remarque que la pression P^n et le débit global \vec{q}_0^n n'apparaissent nulle part dans ces équations, sauf dans les problèmes de minimisation du type (1.16) sur les frontières où le débit d'eau est imposé.

Le débit (eau + huile) \vec{q}_0 n'étant pas nécessairement imposé sur ces frontières, ($\vec{q}_0 \cdot \vec{\nu}$ nul sur Γ_{imp} , donc connu, mais il ne sera pas connu a priori sur les arêtes bordant les macroéléments des puits d'injection), il y a là un autre couplage entre les équations en saturation et en pression.

Enfin il reste à calculer $S_{\Gamma_{imp}}^n$, qui est toujours donné par (1.17), inchangée.

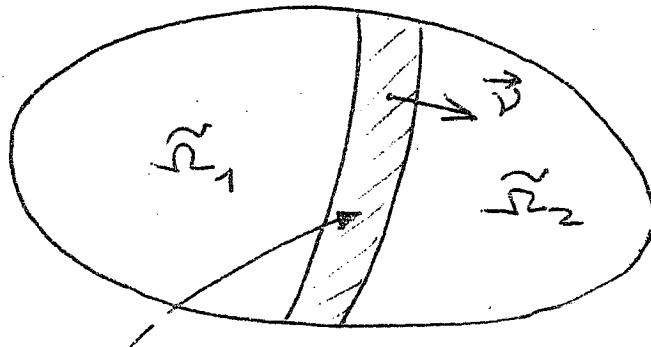
. équations donnant S^{n+1}

L'équation (1.18) reste inchangée, à condition de définir de façon précise le débit d'eau \vec{q}_w^n sur Γ_{12}

Or on a vu que :

$$\vec{q}_w^n \cdot \vec{\nu} = \vec{r}^n \cdot \vec{\nu} + \vec{f}^n(x, S^n) \cdot \vec{\nu}$$

Vu le choix sur l'approximation de \vec{r}^n , i.e. $\vec{r}^n \in \vec{X}_h^n$, on a continuité de $\vec{r}^n \cdot \vec{\nu}$ à travers Γ_{12} . Pour avoir une valeur unique du débit d'eau $\vec{q}_w^n \cdot \vec{\nu}$ à travers Γ_{12} , il faut donc définir une valeur unique de $\vec{f}^n(x, S^n) \cdot \vec{\nu}$. Or une application brutale de (1.13quarto) donnerait deux valeurs différentes de part et d'autre de Γ_{12} . On considèrera donc que les deux types de roche $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$ sont séparés par



Interface à la saturation non réduite \overline{SH}

une mince interface contenant des fluides à la saturation non réduite \overline{SH} , à laquelle correspond pour chaque type de roche, une saturation réduite SH^1 et SH^2 . On déterminera \overline{SH} en écrivant que la trace $\vec{f}^{1n} \cdot \vec{\nu}$ sur la frontière séparant $\tilde{\Omega}_1$ et l'interface (déterminée par 1.13 quarto avec les données du premier type roche) est égale à la trace de $\vec{f}^{2n} \cdot \vec{\nu}$ sur la frontière séparant l'interface et $\tilde{\Omega}_2$ (déterminée par 1.13 quarto avec les données du deuxième type de roche).

On verra, en écrivant les équations correspondantes :

- qu'il y a toujours, en chaque point de Γ_{12} au moins une saturation $\overline{SH} \in [0,1]$ répondant au problème (les saturations réduites correspondantes SH^1 et SH^2 ne seront pas nécessairement dans l'intervalle $[0,1]$)

- que la valeur du débit correspondant, elle, est unique

- que si les types de roches sont identiques dans $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$, $SH^1 = SH^2$ est la valeur de Godunov est déterminée par (1.13 quarto) dans $I(S_{\Gamma_{12}}^1, S_{\Gamma_{12}}^2)$, et le débit d'eau est le débit obtenu dans le cas d'un seul type de roche.

2.2 Modification des équations discrètes

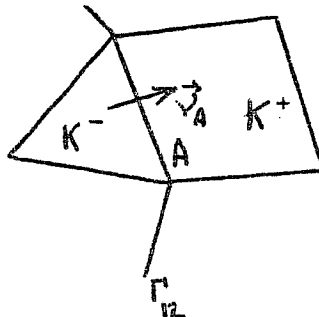
. Calcul préalable des champs \vec{q}_1 et \vec{q}_2

Introduisons la matrice $AQ = (AQ_{AB}, A, B \in \mathcal{C}_h)$ définie par :

$$(2.18) \quad AQ_{AB} = \int_{\tilde{\Omega}} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx$$

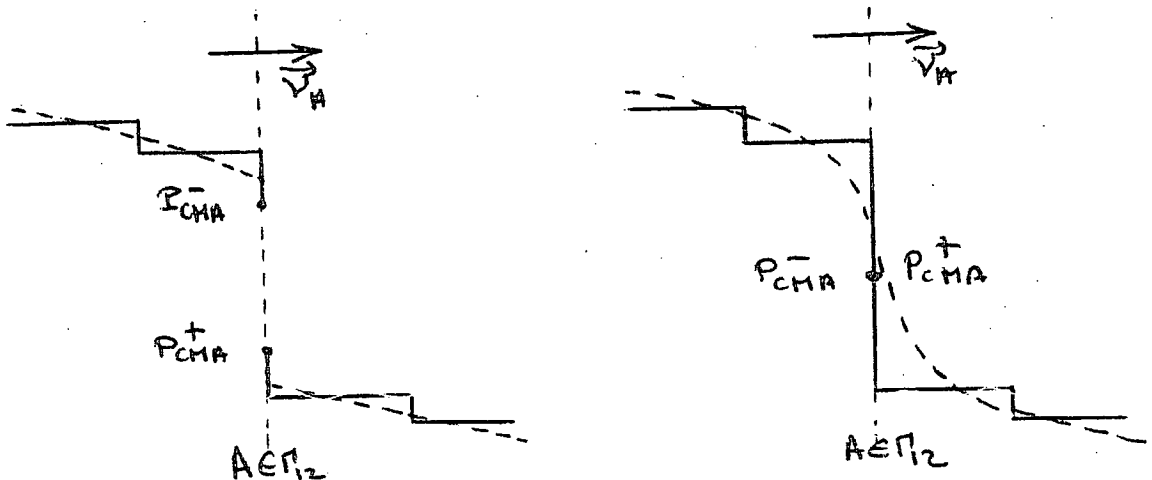
et le vecteur $DAQ = (DAQ_A, A \in \Gamma_{12})$

$$(2.19) \quad DAQ_A = \int_{K^-} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A \, dx - \int_{K^+} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A \, dx$$



i) Le calcul de \vec{q}_2 par (2.11) suppose que l'on s'est donné au minimum :

- une valeur moyenne P_{CMK} de P_{CM} sur chaque élément
- une valeur moyenne P_{CMA} de P_{CM} sur chaque arête A de $\partial\tilde{\Omega}$
- deux valeurs moyennes P_{CMA}^- et P_{CMA}^+ sur chaque arête A de Γ_{12} (correspondant à l'amont et l'aval par rapport à la normale positive \vec{v}_A de l'arête A)



En pratique seules sont données les valeurs moyennes de P_{CM} sur les éléments, et il faudra s'arranger pour générer, d'une façon ou d'une autre, les traces P_{CMA} , P_{CMA}^- et P_{CMA}^+ :

- pour $A \in \partial\tilde{\Omega}$ une solution raisonnable est de prendre :

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{CMA} = P_{CMK} \text{ où } K \text{ est l'élément de } \mathcal{E}_h \\ \text{adjacent à } A \end{array} \right.$$

- pour $A \in \Gamma_{12}$ on a deux possibilités (cf. figure p.40), car la même famille de valeurs moyennes P_{CMK} peut être considérée comme approchant soit une fonction discontinue (à gauche), soit une fonction continue (à droite).

a) si on choisit d'interpréter les P_{CMK} comme provenant d'une fonction discontinue, on peut (par exemple) poser :

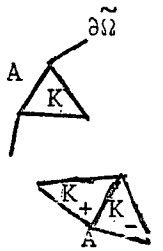
$$(2.21) \quad P_{CMA}^- - P_{CMA}^+ = P_{CMK-} - P_{CMK+}$$

et calculer \vec{q}_2 par (2.11) qui s'écrit, sous forme matricielle

$$(2.22) \quad A Q \cdot Q_2 = F Q_2$$

où le vecteur $F Q_2 = (F Q_2_A, A \in \mathcal{C}_h^b)$ est défini par :

$$(2.23) \quad F Q_2_A = \begin{cases} Z_{AK} (P_{CMK} - P_{CMA}) & \text{si } A \in \partial \tilde{\Omega} \\ (P_{CMK-} - P_{CMK+}) - (P_{CMA}^- - P_{CMA}^+) & \text{si } A \in \Gamma_{12} \\ P_{CMK-} - P_{CMK+} & \text{sinon} \end{cases}$$



(avec le choix (2.21) pour la discontinuité de P_{CM} , $F Q_2$ est nul sur Γ_{12} !).
On calcule ensuite, sur chaque arête de Γ_{12} :

$$(2.24) \quad \begin{cases} P_{CMA}^- + P_{CMA}^+ = P_{CMK-} + P_{CMK+} \\ - D A Q_A \cdot Q_2_A - \sum_{\substack{B \in \partial K^- \\ B \neq A}} A Q_{AB} \cdot Q_2_B + \sum_{\substack{B \in \partial K^+ \\ B \neq A}} A Q_{AB} \cdot Q_2_B \end{cases}$$

On a bien calculé \vec{q}_2 ainsi que P_{CMA}^- , P_{CMA}^+ sur chaque arête de Γ_{12} .

b) si on choisit d'interpréter les P_{CMK} comme provenant d'une fonction continue, il suffit de remplacer (2.21) par :

$$(2.25) \quad P_{CMA}^- - P_{CMA}^+ = 0$$

et la suite des calculs est inchangée.

ii) le calcul de \vec{q}_1 par (2.13) pose moins de problèmes, car la profondeur $Z(x)$ est en pratique une fonction continue dont on connaît une expression analytique. Il suffira donc de résoudre le système linéaire :

$$(2.26) \quad AQ.Q1 = FQ1$$

où le second membre $FQ1 = (FQ1_A, A \in \mathcal{C}_h^0)$ est défini par :

$$(2.27) \quad FQ1_A = \begin{cases} Z_{A,K} [\text{Moy}_K \{P_G(x)\} - \text{Moy}_A \{P_G(x)\}] & \text{si } A \in \partial\tilde{\Omega} \\ \text{Moy}_{K^-} \{P_G(x)\} - \text{Moy}_{K^+} \{P_G(x)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

avec :

$$(2.28) \quad \begin{cases} P_G(x) = -\rho_m g Z(x) \\ \rho_m = \frac{1}{2} (\rho_w + \rho_o) \end{cases}$$

. équations en pression

Pour chaque arête A de Γ_{12} , on définit les traces amont S_A^{n-} et aval S_A^{n+} de S par rapport à la normale positive \vec{v}_A de A , (ces deux traces sont constantes sur chaque arête A , donc S_A^{n-} et S_A^{n+} sont des nombres compris entre 0 et 1), que l'on suppose ici connus (en fait, on en connaîtra seulement une approximation). Il suffit de modifier le second membre de (1.24) en posant :

$$(2.29) \quad FPDIR_A = \begin{cases} Z_{A,\tilde{\Omega}} \tilde{P}_{dA} & \text{si } A \in \Gamma_w^1 \\ P_{CMA}^- \gamma^-(S_A^{n-}) - P_{CMA}^+ \gamma^+(S_A^{n+}) & \text{si } A \in \Gamma_{12} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une fois P^n , \vec{q}_0^n calculés, on peut si on le désire calculer les traces P_A^{n-} et P_A^{n+} de P sur les arêtes A de Γ_{12} . Il suffit de poser, pour toute arête A de Γ_{12} :

$$(2.30) \quad \begin{cases} \tilde{DAD}_A^n = \int_{K^-} \frac{1}{d^-(S_{K^-})} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A - \int_{K^+} \frac{1}{d^+(S_{K^+})} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A \\ \tilde{D\tilde{\Gamma}J}_A^n = \int_{K^-} \gamma_j^-(S_{K^-}) \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A - \int_{K^+} \gamma_j^+(S_{K^+}) \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A \quad j = 1, 2 \\ \forall A \in \Gamma_{12} \end{cases}$$

et de calculer P_A^{n-} et P_A^{n+} sur chaque arête A de Γ_{12} par :

$$(2.31) \quad \begin{aligned} P_A^{n-} + P_A^{n+} &= P_{K^-} + P_{K^+} - \{ \tilde{DAD}_A^n \cdot Q_A - \tilde{D\tilde{\Gamma}1}_A^n \cdot Q1 - \tilde{D\tilde{\Gamma}2}_A^n \cdot Q2_A \} \\ &\quad - \sum_{\substack{B \subset \partial K^- \\ B \neq A}} \{ \tilde{AD}_{AB}^n \cdot Q_B - \tilde{A\tilde{\Gamma}1}_{AB}^n \cdot Q1_B - \tilde{A\tilde{\Gamma}2}_{AB}^n \cdot Q2_B \} \\ &\quad + \sum_{\substack{B \subset \partial K^+ \\ B \neq A}} \{ \tilde{AD}_{AB}^n \cdot Q_B - \tilde{A\tilde{\Gamma}1}_{AB}^n \cdot Q1_B - \tilde{A\tilde{\Gamma}2}_{AB}^n \cdot Q2_B \} \end{aligned}$$

$$(2.32) \quad P_A^{n-} - P_A^{n+} = P_{CMA}^- \gamma^-(S_A^{n-}) - P_{CMA}^+ \gamma^+(S_A^{n+})$$

(Le calcul de P_A^{n-} et P_A^{n+} n'est pas nécessaire pour la suite des calculs).

. équations en \vec{r}^n , S_A^{n-} , S_A^{n+} , $SEXT^n$

L'équation (2.15) et les conditions aux limites (1.15), (1.16) se traduisent encore par l'équation matricielle

$$(2.33) \quad \tilde{AR}^n \cdot R^n = \tilde{FR}^n$$

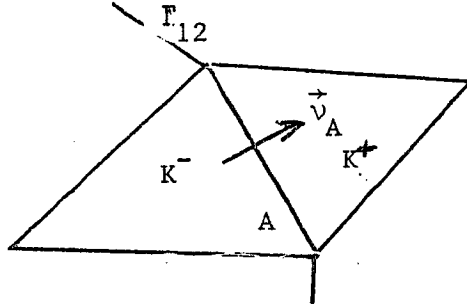
où \tilde{FR}^n dépend maintenant des inconnues S_A^{n-} , S_A^{n+} par l'intermédiaire (cf. (1.28)) du vecteur $FRA1$ modifié de la façon suivante :

$$(2.34) \quad \text{FRAI}_A = \begin{cases} Z_{A,\Omega} \alpha(1) & \text{si } A \in \Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2 \\ \alpha^-(S_A^{n-}) - \alpha^+(S_A^{n+}) & \text{si } A \in \Gamma_{12} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définissons le vecteur $\text{DAR} = (\text{DAR}_A, A \in \Gamma_{12})$ par :

$$(2.35) \quad \text{DAR}_A^n = \int_{K^-} \frac{1}{P_{\text{CMK}^-} d(S_{K^-}^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A - \int_{K^+} \frac{1}{P_{\text{CMK}^+} d(S_{K^+}^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_A$$

où K^- et K^+ sont les éléments adjacents à A (cf. figure ci-dessous)



Alors les relations (2.16) se résument à :

$$(2.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^-(S_A^{n-}) + \alpha^+(S_A^{n+}) = \text{AMOY}_{K^-}^n + \text{AMOY}_{K^+}^n \\ - \text{DAR}_A^n \cdot R_A^n - \sum_{\substack{B \in \partial K^- \\ B \neq A}} \text{AR}_{AB} R_B^n + \sum_{\substack{B \in \partial K^+ \\ B \neq A}} \text{AR}_{AB} R_B^n \\ \forall A \in \Gamma_{12} \end{array} \right.$$

et (2.17) se réécrit :

$$(2.37) \quad P_{\text{CMA}}^- P_c^-(S_A^{n-}) = P_{\text{CMA}}^+ P_c^+(S_A^{n+})$$

Les équations (2.33), (2.36) et (2.37) forment un système non linéaire d'équations qu'il faut résoudre pour avoir \vec{r}_A^n , S_A^{n-} et S_A^{n+} pour $A \in \Gamma_{12}$.

On remarque que ce système non linéaire ne dépend pas de P^n, q_0^n , sauf lorsqu'on modifie $\tilde{A}R$ et $\tilde{F}R^n$ en $\tilde{A}R$ et $\tilde{F}R^n$ pour tenir compte des conditions aux limites (1.15bis) et (1.16bis) sur les frontières à débit d'eau imposé (ici Γ_{imp} seulement)

On remarque aussi que, puisque l'on sera probablement obligé d'itérer pour résoudre le système non linéaire (2.33), (2.36) et (2.37), on peut envisager de résoudre par la même occasion le système non linéaire provenant des conditions aux limites de débit en eau imposé, en remplaçant (1.15bis) et (1.16bis) par

$$(2.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \text{ est déterminé, en tout point } \gamma \text{ de } A \subset \Gamma_{imp}, \text{ par :} \\ F_A^n(\xi) = Z_{A,K} \text{ Signe}(\text{SEXT}_A^n - S^n|_A) \text{ Min } \{ Z_{A,K} \text{ Signe}(\text{SEXT}_A^n - S^n|_A) F_A^n(k) \} \\ \quad \quad \quad k \in I(\text{SEXT}_A^n, S^n|_A) \\ S^n|_A = \text{trace intérieure de } S^n \text{ sur } A \end{array} \right.$$

$$(2.39) \quad R_A^n = - \text{Moy}_A \{ F_A^n(\xi) \}$$

de sorte que le second membre $\tilde{F}R^n$ dépend aussi de SEXT_A^n , par l'intermédiaire de $F_A^n(\xi)$, qui est une fonction décroissante de SEXT_A^n si la normale positive \vec{v}_A est sortante de $\tilde{\Omega}$, et croissante lorsque \vec{v}_A rentre dans $\tilde{\Omega}$.

Dans un premier temps, on propose de découpler les équations (2.33), (2.36) et (2.37) de la façon suivante :

- on résoud le système linéaire (2.33) où le second membre $\tilde{F}R^n$ est calculé en utilisant S_A^{n-1-} et S_A^{n-1+}
- on calcule

$$(2.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^-(S_A^{n-}) + \alpha^+(S_A^{n+}) = S_A^n \quad \text{par (2.36)} \\ P_{CMA}^- P_c^-(S_A^{n-}) - P_{CM}^+ P_c^+(S_A^{n+}) = 0 \end{array} \right.$$

- on détermine S_A^n et S_A^{n+} par la résolution du système non linéaire à deux inconnues (2.40)

Enfin, les équations (1.17bis) donnant $S_{\Gamma_{imp}}^n$ sont inchangées, et peuvent être résolues une fois \vec{r}^n calculé.

équations donnant S^{n+1}

Il faut définir le débit d'eau à travers les arêtes de Γ_{12} .
On va procéder comme au § 1.6.

Définissons, sur chaque arête A de Γ_{12} , deux fonctions F_A^{n-} et F_A^{n+} de la saturation $k \in [0, 1]$:

$$(2.41) \quad F_A^{nl}(k) = b_0^l(k) Q_A + \sum_{j=1}^2 b_j^l(k) Q_{jA} \quad l = -, +$$

et définissons, en tout point γ de $A \subset \Gamma_{12}$, une "saturation hyperbolique" $\overline{SH}(\gamma)$ représentant la saturation non réduite dans l'"interface" entourant A (cf. Figure). Les saturations réduites correspondantes SH^- et SH^+ pour chacun des deux types de roches entourant Γ_{12} sont alors

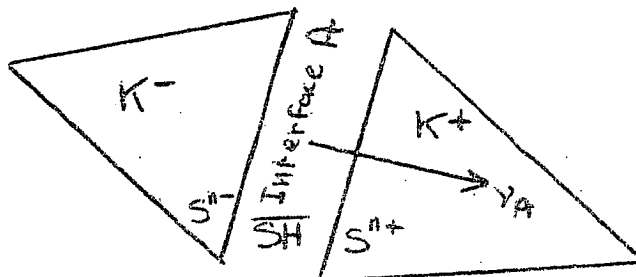
$$SH^l(\gamma) = (\overline{SH} - \overline{S}_m^l(\gamma)) (\overline{S}_M^l(\gamma) - \overline{S}_m^l(\gamma)), l = -, +.$$

Il est alors naturel de définir, suivant (1.28), deux saturations de Godunov $\xi^-(\gamma)$ et $\xi^+(\gamma)$ en tout point γ de A par :

$$(2.42) \quad \begin{cases} F_A^{n-}(\xi^-(\gamma)) = \text{Signe}(SH^-(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) \min_{k \in I(SH^-(\gamma), S^{n-}(\gamma))} \{ \text{Signe}(SH^-(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) F_A^{n-}(k) \} \\ F_A^{n+}(\xi^+(\gamma)) = \text{Signe}(S^{n+}(\gamma) - SH^+(\gamma)) \min_{k \in I(S^{n+}(\gamma), SH^+(\gamma))} \{ \text{Signe}(S^{n+}(\gamma) - SH^+(\gamma)) F_A^{n+}(k) \} \end{cases}$$

Puisque $S^{n-}(\gamma)$ et $S^{n+}(\gamma)$ sont connues, $F_A^{n-}(\xi^-(\gamma))$ et $F_A^{n+}(\xi^+(\gamma))$ sont des fonctions connues de l'inconnue $\overline{SH}(\gamma)$. On posera donc :

$$(2.43) \quad \begin{cases} \Theta_A^-(\overline{SH}(\gamma)) = F_A^{n-}(\xi^-(\gamma)) \\ \quad \quad \quad = \text{fonction décroissante de } \overline{SH}(\gamma) \\ \Theta_A^+(\overline{SH}(\gamma)) = F_A^{n+}(\xi^+(\gamma)) \\ \quad \quad \quad = \text{fonction croissante de } \overline{SH}(\gamma) \end{cases}$$



Avec ces notations, les débits d'eau partiels le long de A sont donnés par :

$$(2.44) \quad \begin{cases} R_A^n + \theta_A^-(\overline{SH}(\gamma)) & \text{pour les débits partiels entre } K^- \\ & \text{et l'interface A} \\ R_A^n + \theta_A^+(\overline{SH}(\gamma)) & \text{pour les débits partiels entre} \\ & \text{l'interface A et } K^+ \end{cases}$$

et $\overline{SH}(\gamma)$ est choisi de façon à assurer l'égalité, en γ , de ces deux débits partiels d'eau. Il suffit donc que $\overline{SH}(\gamma)$ vérifie l'équation :

$$(2.45) \quad \theta_A^-(\overline{SH}(\gamma)) = \theta_A^+(\overline{SH}(\gamma)) \quad \forall \gamma \in A \\ \forall A \in \Gamma_{12}$$

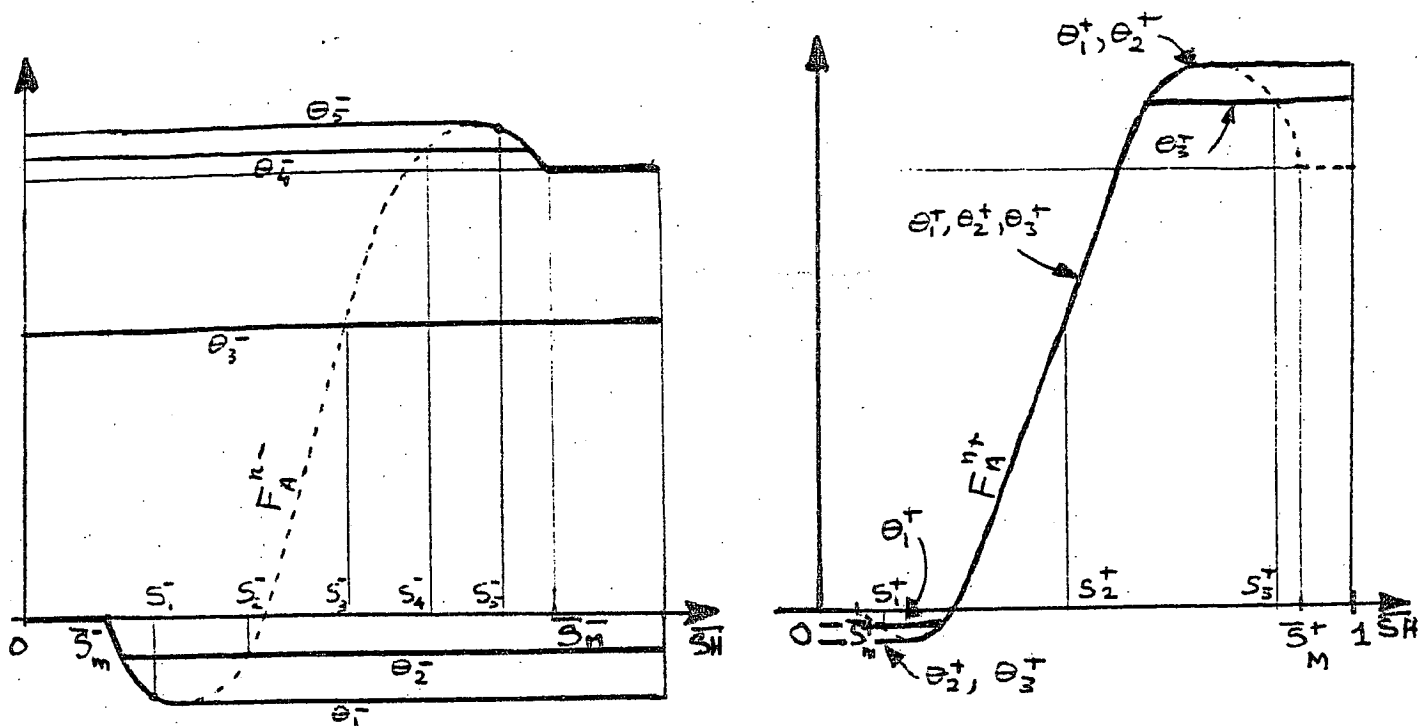
L'équation (2.45) peut avoir plusieurs solutions en $\overline{SH}(\gamma)$, mais θ_A^- étant décroissante et θ_A^+ croissante, la valeur commune de θ_A^- et θ_A^+ est nécessairement unique.

Les débits d'eau partiels à travers l'arête A de Γ_{12} seront alors par définition la valeur commune de $R_A + \theta_A^-$ et $R_A + \theta_A^+$ ainsi déterminée.

Il faut ensuite vérifier que l'équation (2.45) admet toujours au moins une solution. On a représenté, sur la figure ci-dessous :

- à gauche les différentes fonctions $\theta_j^-(\overline{SH})$ obtenues pour diverses valeurs S_j^- de S^{n-} , et pour une fonction F_A^{n-} (en tireté) assez générale.
- à droite les différentes fonctions $\theta_j^+(\overline{SH})$ obtenues pour diverses valeurs S_j^+ de S^{n+} , et pour une fonction F_A^{n+} (en tireté) assez générale.

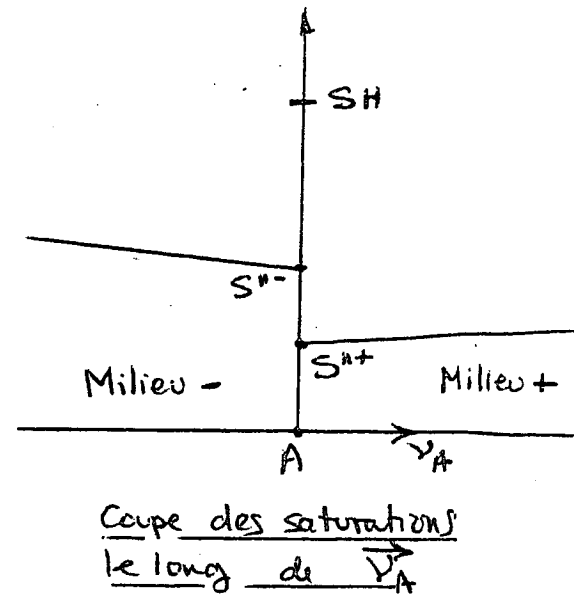
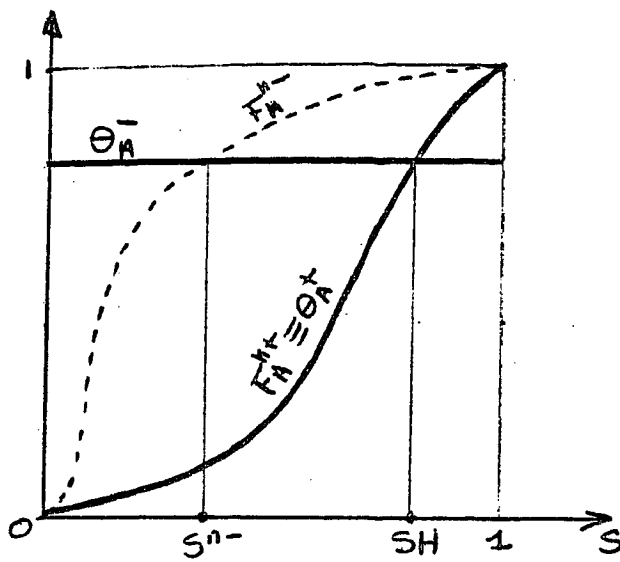
On constate que, pour toutes les combinaisons possibles de fonctions θ^- et θ^+ possibles, l'équation (2.45) a toujours au moins une solution $\overline{SH}(\gamma)$ dans l'intervalle $[0,1]$ (les saturations réduites correspondant dans chaque type de roche peuvent être en dehors de l'intervalle $[0,1]$!)



Lorsque F_A^{n+} et F_A^{n-} sont monotones croissantes (par exemple lorsque \vec{q}_1 et \vec{q}_2 sont nuls), alors les fonctions θ_A^+ et θ_A^- sont particulièrement simples :

$$(2.46) \quad \begin{cases} \theta_A^-(SH) = F_A^{n-}(S^-) = \text{cste} \\ \theta_A^+(SH) = F_A^{n+}(SH^+) \end{cases}$$

La figure suivante montre un exemple de détermination de \overline{SH} pour un milieu - où l'eau circule facilement (fractional flow F_A^{n-} élevé) et un milieu + où l'eau circule difficilement (fractional flow F_A^{n+} bas), dans un cas où les saturations résiduelles sont les mêmes dans les deux types de roche (on peut donc considérer $SH = SH^- = SH^+$ au lieu de \overline{SH}). On constate que, quelle que soit la saturation S^{n+} dans le milieu +, la saturation SH est toujours supérieure à S^{n-} : le milieu + (où l'eau circule difficilement) freine le débit d'eau en provenance du milieu - (où l'eau circule facilement) en lui présentant une "saturation apparente" SH toujours plus élevée que la saturation dans le milieu -.



Il reste enfin à vérifier que, dans le cas particulier où les deux fractional flows F_A^{n-} et F_A^{n+} sont identiques, (c.a.d. où A est une arête ordinaire), la définition précédente redonne bien le débit d'eau défini au § 1.6 par (1.28) et (1.31). Or ceci est évident car il suffit alors, pour satisfaire (2.45), de choisir $SH(\gamma) = \xi(\gamma)$ défini par (1.28).

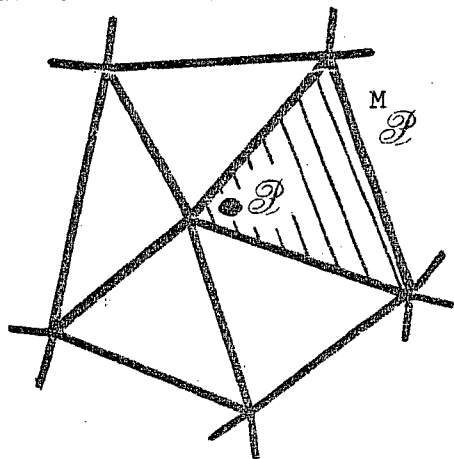
III - INTRODUCTION DE PUITS DANS LE MODELE

3.1 - Les Macroéléments Puits

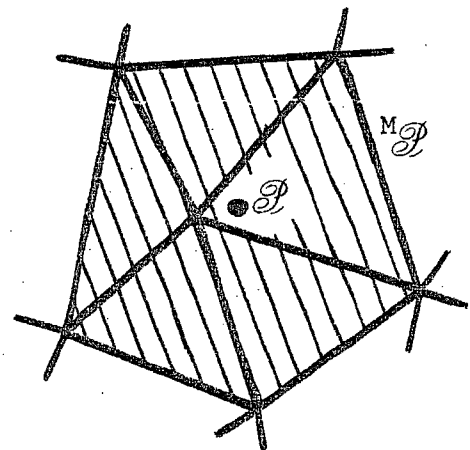
On va maintenant introduire les puits dans le modèle en introduisant la notion de macroélément [3], [4]. Pour simplifier la présentation on va supposer qu'il y en aura un seul, la généralisation au cas de plusieurs puits étant immédiate.

Plaçons un puits \mathcal{P} quelque part dans le domaine $\tilde{\Omega}$. On envisage de simuler les écoulements des fluides dans un voisinage du puits avec un modèle simplifié mais plus réaliste. Ce voisinage est formé par un nombre fini d'éléments de la triangulation \mathcal{T}_h et sera appelé le macroélément associé à \mathcal{P} , $M_{\mathcal{P}}$.

Pour la qualité des résultats, il sera souhaitable que le puits \mathcal{P} soit placé à peu près au milieu du macroélément associé, compte tenu des approximations que l'on fait dans le modèle de simulation à l'intérieur du macroélément.



Mauvais choix de $M_{\mathcal{P}}$



Meilleur choix de $M_{\mathcal{P}}$

On utilise encore les notations,

- $\mathcal{T}_{\mathcal{P}_h}$, ensemble des éléments intérieurs au macroélément $M_{\mathcal{P}}$
- $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_h}$, ensemble des arêtes intérieures au macroélément $M_{\mathcal{P}}$,
- $\Gamma_{\mathcal{P}} = \partial M_{\mathcal{P}}$, la frontière du macroélément,
- $\Omega = \tilde{\Omega} / M_{\mathcal{P}}$,

- $Q_{\mathcal{P}}$, le débit total au puits,
- $P_{\mathcal{P}}$, la pression au puits,
- $PEXT_A$, la pression constante sur chaque arête $A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$ du côté du macroélément $M_{\mathcal{P}}$,

On note que $AP_h = \emptyset$ si le macroélément est réduit à un seul élément.

Dans la suite, on conviendra que, au puits, les débits de production (resp. d'injection) sont positifs (resp. négatifs).

L'interface entre le modèle "éléments finis" et le modèle "macroélément" est établie par les conditions suivantes :

- (i) - Les débits totaux et les débits d'eau sont continus à travers la frontière du macroélément $\Gamma_{\mathcal{P}}$, afin que le modèle global reste conservatif,
- (ii) - Si $Q_{\mathcal{P}}$ dénote le débit global au puits \mathcal{P} , l'incompressibilité dans le macroélément s'exprime par la relation.:

$$(3.1) \quad - \sum_{A \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \text{DIV}_{K_A, A} Q_A + Q_{\mathcal{P}} = - \sum_{A \in \Gamma_{\mathcal{P}}} Z_{A, \Omega} Q_A + Q_{\mathcal{P}} = 0$$

où K_A est l'élément adjacent à A extérieur au macroélément,

- (iii) - La relation entre la pression au puits $P_{\mathcal{P}}$ et le débit total Q_A à travers l'arête $A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$ est donnée par :

$$(3.2) \quad Z_{A, \Omega} Q_A = + \text{DIV}_{K_A, A} Q_A = \alpha_A (PEXT_A - P_{\mathcal{P}})$$

où α_A est un coefficient positif "de Fourier" que le modèle "macroélément" fournit.

Quand \mathcal{P} est un puits d'injection, c'est le modèle "macroélément" qui fournit au modèle "éléments finis" les débits en eau à travers $\Gamma_{\mathcal{P}}$. Quand, par contre, \mathcal{P} est un puits de production, c'est le modèle "éléments finis" qui fournit au modèle "macroéléments" les débits en eau à travers $\Gamma_{\mathcal{P}}$.

Pour une description d'un modèle de simulation des écoulements dans les macroéléments, on renvoie à [1].

3.2 - Modification des Equations en Pression

Comme les équations (1.1), (1.2) sont utilisées maintenant dans Ω au lieu de $\tilde{\Omega}$, les équations (1.11bis), (1.12bis) sont modifiées.

(1.11bis) devient maintenant,

$$(3.3) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h} Q_A \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{s}_A \cdot dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h$$

D'autre part, (1.12bis) devient maintenant,

$$\begin{aligned} & \sum_{A \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h} Q_A \int_{\Omega} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h} P_K \int_{\Omega} v_K \operatorname{div} \vec{s}_B \\ &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_h \\ A \subset \Gamma}} - \int_{A \cap B} P_{EXT_A} \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}^{\Omega} \, d\gamma + H(\vec{s}_B) \quad \forall B \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h \quad B \notin (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_w^2) \end{aligned}$$

où

$$H(\vec{s}_B) = \sum_{j=1}^2 \sum_{A \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_{hh}} Q_{jA} \int_{\gamma_j} (S^n) \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx - P_{dB} \int_B \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}_B^{\Omega} \, d\gamma,$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{A \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h} Q_A^n \int_{\Omega} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx + Q_B^n \frac{1}{\alpha_B^n} \left(\int_{B \cap \Gamma} \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}^{\Omega} \, d\gamma \right)^2 \\ & - \sum_{K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h} P_K^n \int_{\Omega} v_K \operatorname{div} \vec{s}_B \, dx + P_{\mathcal{P}}^n \int_{B \cap \Gamma_{\mathcal{P}}} \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}^{\Omega} \, d\gamma = H(\vec{s}_B) \\ & \forall B \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h, B \notin (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_w^2) \end{aligned} \right.$$

On note d'abord que le nombre d'inconnues en débit et pression a été modifié, puisque, pour les débits, on a supprimé les inconnues associées aux arêtes de \mathcal{AP}_h et que, pour les pressions, on a supprimé les inconnues associées aux éléments de \mathcal{CP}_h . Cependant, pour des raisons pratiques de programmation, on maintiendra les inconnues en écrivant :

$$(3.5) \quad Q_A = 0 \quad \forall A \in \mathcal{AP}_h$$

$$(3.6) \quad P_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{CP}_h$$

D'autre part, on constate que, dans les équations (3.4), les coefficients diagonaux sont modifiés pour les équations correspondant aux arêtes B de Γ_P . De plus le second membre $H(\vec{s}_B)$ a aussi été modifié car les intégrales sont prises sur Ω et non plus sur $\tilde{\Omega}$.

On note donc AD la matrice :

$$(3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} AD_{A,A} = \int_{\Omega} \frac{1}{d(S)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B + \frac{1}{\alpha_A} \quad \forall A \in \Gamma_P \\ AD_{A,B} = \delta_A^B \quad \text{si } A \in \mathcal{AP}_h \text{ ou } B \in \mathcal{AP}_h, \\ AD_{A,B} = \tilde{AD}_{A,B} \quad \text{dans les autres cas,} \end{array} \right.$$

où δ_A^B est le symbole de Kronecker. La deuxième relation (3.7) a été introduite pour supprimer la contribution des éléments intérieurs au macroélément et tenir compte de (3.5).

Modifions maintenant le second membre des équations (1.24), en débit-pression. On introduit les matrices, pour $J = 1, 2$:

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A\Gamma^J_{A,A} = \int_{\Omega} \gamma_j(S) \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B \, dx, \quad \forall A \in \Gamma_P \\ A\Gamma^J_{A,B} = 0, \quad \text{si } A \in \mathcal{AP}_h \text{ ou } B \in \mathcal{AP}_h, \\ A\Gamma^J_{A,B} = \tilde{A\Gamma^J}_{A,B}, \quad \text{dans les autres cas,} \end{array} \right.$$

et le vecteur FQ tel que :

$$(3.9) \quad \begin{cases} FQ_A = (A\Gamma_1 Q_1 + A\Gamma_2 \cdot Q_2 - FPDIR)_A, & \forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_h \\ FQ_A = 0, & \forall A \in \mathcal{A}_h \end{cases}$$

où $FPDIR$ est défini en (1.22). La deuxième relation (3.8) a été introduite pour supprimer la contribution des éléments intérieurs au macroélément.

On prendra ensuite en compte les conditions aux limites (1.13bis) en modifiant localement AD et FQ qu'on notera après modifications \overline{AD} et \overline{FQ} .

Enfin, on introduit le vecteur uniligne $DIV \mathcal{P} = (DIV \mathcal{P}_A)_{A \in \mathcal{A}_h}$ tel que :

$$A \subset \Gamma_{\mathcal{P}}$$

$$(3.10) \quad \begin{cases} DIV \mathcal{P}_A = Z_{A,\Omega} & \forall A \in \mathcal{A}_h, A \subset \Gamma_{\mathcal{P}} \\ DIV \mathcal{P}_A = 0 & \forall A \in \mathcal{A}_h, A \not\subset \Gamma_{\mathcal{P}} \end{cases}$$

Il faut distinguer maintenant deux cas suivant que $P\mathcal{P}$ est inconnu et $Q\mathcal{P}$ donné ou l'inverse.

CAS 1 : $P\mathcal{P}$ est inconnu et $Q\mathcal{P}$ est donné

Le système (3.1), (3.3), (3.4), (3.5), (1.13bis) écrit :

$$(3.11) \quad \begin{bmatrix} \overline{AD}^n & -{}^t DIV & -{}^t DIV \mathcal{P} \\ -DIV & 0 & 0 \\ -DIV \mathcal{P} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^n \\ P^n \\ P\mathcal{P}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{FQ}^n \\ 0 \\ Q\mathcal{P}^n \end{bmatrix}$$

et il faut y adjoindre (3.6).

Le système (3.11) peut être interprété comme un problème de point selle pour lequel $P\mathcal{P}^n$ est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte (3.1) et dont le Lagrangien \mathcal{L} est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{na} \times \mathbb{R}^{ne} \times \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{L}(S, \overline{V}, V\mathcal{P}) = \frac{1}{2} \overline{AD}^n S - \overline{FQ}^n, \quad S \rightarrow -\langle \overline{V}, DIV S \rangle - V\mathcal{P} (DIV \mathcal{P} \cdot S + Q\mathcal{P})$$

où le troisième terme dans le membre de droite est un produit dans \mathbb{R} et où \bar{V} est un vecteur de \mathbb{R}^{ne} tel que

$$\bar{V}_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

On augmente ensuite le Lagrangien :

$$\mathcal{L}_\omega(S, \bar{V}, v, \mathcal{P}) = \mathcal{L}(S, \bar{V}, v, \mathcal{P}) + \frac{\omega}{2} (\| \text{DIV } S \|^2 + \| \text{DIV } \mathcal{P} \cdot S + Q \mathcal{P} \|^2)$$

L'algorithme d'Uzawa s'écrit alors, k étant l'indice des itérations :

$$- k = 0, P \mathcal{P}^{n,0} = P \mathcal{P}^{n-1}, P^{n,0} = P^{n-1} \quad \text{avec} \quad P_K^{n-1} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

$$- P \mathcal{P}^{n,k}, P^{n,k} \text{ étant donnés avec } P_K^{n,k} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \text{ on}$$

calcule $Q^{n,k}$ par :

$$(3.12) \quad \left(\overline{AD}^{n+\omega} ({}^t \text{DIV} \cdot \text{DIV} + {}^t \text{DIV } \mathcal{P} \cdot \text{DIV } \mathcal{P}) \right) Q^{n,k} = {}^t \text{DIV } P^{n,k} + {}^t \text{DIV } \mathcal{P} (P \mathcal{P}^{n,k} - \omega Q) + \overline{FQ}$$

(ce qui donne en particulier $Q_A^{n,k} = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}_h$).

- On calcule ensuite $P^{n,k+1}$ et $P \mathcal{P}^{n,k+1}$ par

$$(3.13) \quad \begin{cases} P_K^{n,k+1} = (P^{n,k} - \omega \text{DIV } Q^{n,k})_K & \forall K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_h \\ P_K^{n,k+1} = 0 & \forall K \in \mathcal{T}_h \end{cases}$$

$$(3.14) \quad P \mathcal{P}^{n,k+1} = P \mathcal{P}^{n,k} - \omega (\text{DIV } \mathcal{P} \cdot Q^{n,k} + Q \mathcal{P}^n)$$

- test de convergence

CAS 2 : $P \mathcal{P}$ est donné et $Q \mathcal{P}$ est inconnu

Alors les équations (3.3), (3.4), (3.5), (1.13bis) s'écrivent :

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} \overline{AD}^n & -{}^t \text{DIV} \\ -\text{DIV} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^n \\ P^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{FQ}^n + {}^t \text{DIV } \mathcal{P} \cdot P \mathcal{P}^n \\ 0 \end{bmatrix}$$

et forment un système fermé si on leur adjoint (3.6).

Le lagrangien \mathcal{L} est alors la fonction définie sur $\mathbb{R}^{na} \times \mathbb{R}^{ne}$ par

$$\mathcal{L}(S, \bar{V}) = \langle \frac{1}{2} \overline{AD^n} \cdot S - \overline{FQ^n} - {}^t \text{DIV } \mathcal{P} \cdot P \mathcal{P}^n, S \rangle - \langle V, \text{DIV } S \rangle$$

Le lagrangien augmenté est :

$$\mathcal{L}_\omega(S, B) = \mathcal{L}(S, \bar{V}) + \frac{\omega}{2} \| \text{DIV } S \|^2$$

et l'algorithme d'Uzawa s'écrit, k étant l'indice des itérations :

- $k = 0, P^{n,0} = P^{n-1}$ avec $P_K^{n-1} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{TP}_h$
- $P^{n,k}$ étant donné avec $P_K^{n,k} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{TP}_h$, on calcule $Q^{n,k}$

par :

$$(3.16) \quad (\overline{AD^n} + \omega {}^t \text{DIV} \cdot \text{DIV}) Q^{n,k} = {}^t \text{DIV } P^{n,k} + {}^t \text{DIV } \mathcal{P} \cdot P \mathcal{P}^n + \overline{FQ^n}$$

(ce qui donne encore en particulier $Q_A^{n,k} = 0 \quad \forall A \in \mathcal{AP}_h$)

- on calcule ensuite $P^{n,k+1}$ par (3.13)
- test de convergence.

L'algorithme ayant convergé, on calcule enfin $Q \mathcal{P}^n$ grâce à (3.1).

3.3 - Modification des Equations en Saturation

Comme précédemment, les équations (1.3), (1.4) sont écrites maintenant dans Ω au lieu de $\tilde{\Omega}$ et les équations (1.14bis), (1.18bis) doivent être modifiées.

De plus, les degrés de liberté de R et S correspondant à l'intérieur du macroélément, c'est-à-dire $R_A, A \in \mathcal{P}_h, S_{K,i}, K \in \mathcal{TP}_h, i = 1, \dots, ns(K)$, disparaissent des équations. Ils seront néanmoins maintenus physiquement dans le programme et fixés arbitrairement à zéro :

$$(3.17) \quad R_A^n = 0 \quad \forall A \in \mathcal{AP}_h$$

$$(3.18) \quad S_{K,i} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{TP}_h, \quad \forall i = 1, \dots, ns(K).$$

Concernant l'équation (1.14bis), l'intégration par parties crée des termes sur le bord $\Gamma_{\mathcal{P}}$.

Pour chaque arête A de $\Gamma_{\mathcal{P}}$, on introduit donc une trace extérieure à Ω de la saturation, notée SEXT_A^n , et on note $S_{\Gamma_{\mathcal{P}}}^n$ le vecteur $(\text{SEXT}_A^n)_{A \in \Gamma_{\mathcal{P}}}$.

Sur A on dispose aussi comme précédemment de deux valeurs aux extrémités de A de la saturation qui fournissent par interpolation linéaire deux valeurs aux points de Gauss $S^n(\text{GA}_{\ell})$, $\ell=1,2$.

Les débits d'eau partiels QWPA_{ℓ} , $\ell=1,2$, aux points de Gauss GA_{ℓ} de chaque arête A de $\Gamma_{\mathcal{P}}$ sont définis maintenant par :

$$(3.19) \quad \text{QWPA}_{\ell} = \text{QWP}_A^n(\xi(\text{GA}_{\ell})) = R_A^n + F_A^n(\xi(\text{GA}_{\ell}))$$

où F_A^n est défini en (1.25) et où

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_A^n(\xi(\text{GA}_{\ell})), \ell=1,2 \text{ est défini par} \\ F_A^n(\xi(\text{GA}_{\ell})) = z_{A,K} \text{ signe } (\text{SEXT}_A^n - S^n(\text{GA}_{\ell})) \cdot \\ \quad \quad \quad \min_{k \in I(\text{SEXT}_A^n, S^n(\text{GA}_{\ell}))} \{ z_{A,K} \text{ signe } (\text{SEXT}_A^n - S^n(\text{GA}_{\ell})) F_A^n(k) \} \end{array} \right.$$

La continuité des débits en eau à travers $\Gamma_{\mathcal{P}}$ s'écrit :

$$(3.21) \quad R_A^n + \frac{1}{2} [F_A^n(\xi(\text{GA}_1)) + F_A^n(\xi(\text{GA}_2))] = \frac{1}{2} [Q \mathcal{P}_{w_{A,1}}^n + Q \mathcal{P}_{w_{A,2}}^n] \quad \forall A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$$

où $Q \mathcal{P}_{w_{A,\ell}}^n$, $\ell=1,2$, sont les débits partiels en eau à travers A dans le macroélément calculés avec la même convention de signe que pour R . Dans le cas où \mathcal{P} est un puits d'injection, $Q \mathcal{P}_{w_{A,\ell}}^n$ sera calculé par le modèle "macroélément", et l'égalité (3.21) fournira une condition sur le bord $\Gamma_{\mathcal{P}}$ pour le calcul de R . Dans le cas où \mathcal{P} est un puits de production, on imposera une condition supplémentaire sur le bord $\Gamma_{\mathcal{P}}$ pour calculer R^n et $Q \mathcal{P}_{w_A}^n$ sera fourni au modèle "macroélément" après avoir été calculé par :

$$(3.22) \quad Q \mathcal{P}_{w_{A,\ell}}^n = \text{QWPA}_{\ell}^n \quad \ell=1,2, \quad \forall A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$$

L'équation en R s'écrit maintenant :

$$(3.23) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h} R_A^n \int_{\Omega} \frac{1}{P_{CM} \cdot d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx = \int_{\Omega} \alpha(S^n) \operatorname{div} \vec{s}_B dx -$$

$$-\alpha(1) \int_{(\Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2) \cap B} \vec{s}_B \cdot \vec{v}^\Omega d\gamma - \alpha(\operatorname{SEXT}_B^n) \int_{\Gamma_{\mathcal{P}} \cap B} \vec{s}_B \cdot \vec{v}^\Omega d\gamma$$

$$\forall B \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h, B \notin \Gamma_{imp}$$

A cause de l'inconnue nouvelle qu'est $S_{\Gamma_{\mathcal{P}}}^n = (\operatorname{SEXT}_{AA \in \Gamma_{\mathcal{P}}}^n)$ il est nécessaire de disposer d'équations supplémentaires. Pour un macroélément d'injection, ces équations seront les équations (3.21), et pour un macroélément de production on en introduira d'autres que nous préciserons plus tard.

On introduit la matrice AR définie de la façon suivante :

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{ll} AR_{A,A} = \int_{\Omega} \frac{1}{P_{CM} d(S)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx & \forall A \in \Gamma_{\mathcal{P}} \\ AR_{A,B} = \delta_A^B & \text{si } A \in \mathcal{AP}_h \text{ ou } B \in \mathcal{AP}_h \\ AR_{A,B} = \tilde{AR}_{A,B} & \text{dans les autres cas} \end{array} \right.$$

Concernant le second membre FR des équations calculant R, pour tenir compte de (3.17) et grâce à (3.18), il suffit d'écrire :

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} FR_A = \tilde{FR}_A & \forall A \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h \\ FR_A = 0 & \forall A \in \mathcal{AP}_h \end{array} \right.$$

Concernant les équations qui calculent S^{n+1} , on doit les écrire seulement dans Ω et tenir compte des débits d'eau calculés sur les arêtes du bord du macroélément. Leurs seconds membre seront les vecteurs $FSK^n(FSK_i^n)$ $i = 1, \dots, ns(K)$ pour $K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{T}_{\mathcal{P}_h}$, tels que :

$$(3.26) \quad FSK_1^n = \sum_{A \in \partial K} \int_K QWP_A^n(S^n) \vec{s}_A \cdot \nabla v_{K,i} dx - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^2 QWP_A^n(\xi(GA_\ell)) \cdot v_{K,i}(GA_\ell)$$

$$\forall K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h, \forall i=1, \dots, ns(K),$$

avec

$$(3.27) \quad QWP_A^n(\xi(GA_\ell)) \begin{cases} = 0 & \ell = 1, 2. & \forall A \in \Gamma_{imp} \\ = Q \mathcal{P}_{w_{A,\ell}}^n & & \forall A \in \Gamma_{\mathcal{P}} \\ \text{calculé par (1.28), (1.31), quand } A \in \mathcal{A}_h \setminus \mathcal{AP}_h, & & \\ & & A \in (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_{\mathcal{P}}) \end{cases}$$

La saturation à l'instant $n+1$ est calculée en résolvant la suite des systèmes linéaires de dimension $ns(K)$:

$$(3.28) \quad ASK(SK^{n+1} - SK^n) = \Delta t FSK^n \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h$$

où ASK est encore donné par (1.39).

On est maintenant amené à distinguer deux cas suivant que le puits est d'injection ou de production.

CAS 1 : Le puits est un puits d'injection

Dans ce cas, le modèle "macroélément" calcule des débits d'eau partiels $Q \mathcal{P}_{w_{A,\ell}}^n$, $\ell=1,2$, à travers chaque arêtes A de $\Gamma_{\mathcal{P}}$. Puis utilisant, $S_{\Gamma_{\mathcal{P}}}^{n-1}$ au lieu de $S_{\Gamma_{\mathcal{P}}}^n$ dans (3.20), on calcule $F_A^n(\xi(GA_\ell))$ de sorte que l'égalité (3.21) fournit une conditions sur le bord de $\Gamma_{\mathcal{P}}$ pour le calcul de R . Alors les équations (3.23) écrites pour $B \notin \Gamma_{\mathcal{P}}$, les équations (3.17) et les conditions aux bords (3.21) et (1.15bis) forment le système linéaire.

$$(3.29) \quad \overline{\overline{AR}} \quad R^n = \overline{\overline{FR}}^n$$

où la barre inférieure représente les modifications locales à AR et FR ,

définis en (3.24) et (3.25), correspondant aux conditions aux bords (1.15bis) et la barre supérieure à celles correspondants aux conditions (3.21).

Une fois R^n connu, on calcule $S_{\Gamma_{\mathcal{D}}}^n$ en résolvant les équations (3.23) écrites pour $B \in \Gamma_{\mathcal{D}}$. $Q_{\mathcal{D}} w_{A,\ell}^n$ et R^n étant maintenant connus, on calcule $Q_{WP_A}^n$ par (3.27) puis $S_{\Gamma_{\mathcal{D}}}^{n+1}$ en résolvant (3.28).

CAS 2 : Le puits est un puits de production

Dans ce cas $Q_{\mathcal{D}} w_{A,\ell}^n$ est inconnu et doit être calculé pour être fourni dans le module du macroélément. Au lieu de (3.21), on prend donc comme condition sur le bord $\Gamma_{\mathcal{D}}$ pour le calcul de R la condition suivante, traduisant la proportionnalité des débits en eau et en huile et de leurs mobilités :

$$(3.30) \quad R_A^n = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{\ell=1}^2 b_j (S^n(GA)) Q_{jA}^n \quad \forall A \in \Gamma_{\mathcal{D}}$$

Ici on a fait l'hypothèse que la saturation de Godunov sur $\Gamma_{\mathcal{D}}$ est la saturation amont, trace sur $\Gamma_{\mathcal{D}}$ de la saturation dans le gisement, ce qui est en général justifié.

On ajoute la condition (3.30) aux conditions aux bords (1.15bis) et, avec les équations (3.23) écrites pour $B \notin \Gamma_{\mathcal{D}}$, et les équations (3.17), elles forment l'équation matricielle suivante :

$$(3.31) \quad \overline{AR} R^n = \overline{FR}^n$$

où la barre supérieure représente maintenant les modifications locales à AR et FR dues à la condition (3.30) au lieu de (3.21).

Une fois R^n calculé, on calcule $Q_{\mathcal{D}} w_{A,\ell}^n$, $\ell=1,2$, pour $A \in \Gamma_{\mathcal{D}}$ grâce à (3.22) qui s'écrit :

$$(3.32) \quad Q_{\mathcal{D}} w_{A,\ell}^n = R_A^n + F_A^n (S^n(GA_{\ell})) \quad \ell = 1,2 \quad \forall A \in \Gamma_{\mathcal{D}}$$

puisque l'on a supposé que la saturation de Godunov sur $\Gamma_{\mathcal{D}}$ est la trace sur $\Gamma_{\mathcal{D}}$ de la saturation dans le gisement.

On peut aussi éventuellement s'assurer que cette hypothèse était justifiée en calculant $S_{\Gamma_{\mathcal{D}}}^n$ grâce aux équations (3.23) écrites pour $B \in \Gamma_{\mathcal{D}}$,

puis en calculant les débits d'eau partiels hors pression capillaire par (3.20). Le test consiste alors à vérifier que les traces sur $\Gamma_{\mathcal{D}}$ de la saturation dans Ω donnent bien les mêmes débits d'eau partiels hors pression capillaire.

Une fois R^n et $Q_{\mathcal{D}_{A,l}}^n$ calculés, on calcule QWP_A^n par (3.27), puis S^{n+1} en résolvant (3.28).

REMARQUE

Dans le but de simplifier quelques formules en vue de la vectorisation des calculs, on peut faire une remarque analogue à la remarque faite à la fin du §1.6 et introduire des triangles fictifs, non seulement sur les arêtes de $\partial\tilde{\Omega}$ mais aussi sur les arêtes de $\Gamma_{\mathcal{D}}$.

De plus au lieu de fixer à zéro la pression dans les éléments de \mathcal{CP}_h comme en (3.6), on peut lui assigner la pression aux puits

$$P_K = P_{\mathcal{D}} \quad \forall K \in \mathcal{CP}_h$$

et modifier la matrice DIV en posant

$$DIV_{K,A} = 0 \quad \forall A \in \partial K \quad \forall K \in \mathcal{CP}_h$$

3.4 - Récapitulation

On récapitule ici les opérations nécessaires pour effectuer un pas de temps. On suppose pour simplifier qu'on a deux puits, l'un d'injection noté \mathcal{D}_{inj} et l'autre de production noté \mathcal{D}_{prod} .

A - Préalablement à la boucle en temps

- 1 - Construire les tableaux AE (cf.1.51), \hat{PSK} (cf. 1.52), \hat{AEGK} (cf.1.56), DIV (cf. 1.19).
- 2 - Déterminer le paramètre ω du lagrangien augmenté pour les équations en pression
- 3 - Calculer une saturation initiale et les vecteurs Q_1 et Q_2 .

B - Données

- 1 - $S^n = (S_{K,l}^n)_{l=1, \dots, ns(K)}, K \in \mathcal{CP}_h$ tel que $S_{K,l}^n = 0$ pour $l=1, \dots, ns(K), K \in \mathcal{CP}_{inj,h} \cup \mathcal{CP}_{prod,h}$

$$2 - S_{\Gamma_{imp}}^{n-1}, S_{\mathcal{P}_{inj}}^{n-1} \quad \text{i.e. (SEXT}_B^{n-1})_{B \in \Gamma_{imp} \cup \mathcal{P}_{inj}}$$

$$3 - P^{n-1} = (P_K^{n-1})_{K \in \mathcal{C}_h} \quad \text{tel que } P_K^{n-1} = 0 \text{ pour } K \in \mathcal{C}_{inj,h} \cup \mathcal{C}_{prod}$$

$$4 - P_i^{n-1}, Q_i^{n-1}, i=inj, prod.$$

C - Calcul de P^n, Q^n , et des débits et pressions aux puits

Successivement,

1 - En même temps, construire la matrice AD^n définie en (3.7), la matrice AR^n définie en (3.24), et calculer $A\Gamma_1^n \cdot Q_1 + A\Gamma_2^n \cdot Q_2$ où $A\Gamma_1$ et $A\Gamma_2$ sont définies en (3.8).

2 - Former le second membre FQ^n des équations en débit-pressure donné par l'égalité (3.9).

3 - Entrer les conditions aux limites (1.13bis) de débit imposé sur $\Gamma_{imp} \cup \Gamma_w^2$, c'est-à-dire modifier localement AD^n et FQ^n en $\overline{AD^n}$ et $\overline{FQ^n}$.

4 - Q_i^n et P_j^n , $i \neq j$, étant donnés pour $i,j = inj$ ou $i,j = prod$ construire la matrice $AD^n + \omega(t_{DIV} \cdot DIV + t_{DIV} \mathcal{P}_i \cdot DIV \mathcal{P}_i)$ et la matrice de préconditionnement si nécessaire (quand les itérations de gradient conjugué deviennent trop nombreuses).

5 - Effectuer alors les itérations de Lagrangien augmenté, ci-dessus, k étant l'indice des itérations :

$$- k=0, P_i^{n,0} = P_{i-1}^{n,0}, P^{n,0} = P^{n-1} \text{ avec } P_K^{n-1} = 0$$

$$\forall K \in \mathcal{C}_{ih} \cup \mathcal{C}_{jh}$$

$$- P_i^{n,k}, P^{n,k} \text{ étant donnés } P_K^{n,k} = 0, \forall K \in \mathcal{C}_{ih} \cup \mathcal{C}_{jh}, \text{ on calcule } Q^{n,k} \text{ par :}$$

$$\begin{aligned} (\overline{AD^n} + \omega(t_{DIV} \cdot DIV + t_{DIV} \mathcal{P}_i \cdot DIV \mathcal{P}_i)) Q^{n,k} = \\ = t_{DIV} P^{n,k} + t_{DIV} \mathcal{P}_i (P_i^{n,k} - \omega \mathcal{P}_i^{n,k}) + t_{DIV} \mathcal{P}_j \cdot P_j^{n,k} + \overline{FQ^n} \end{aligned}$$

$$(\text{ce qui donne en particulier } Q_A^{n,k} = 0 \quad \forall A \in \mathcal{C}_{ih} \cup \mathcal{C}_{jh})$$

- on calcule ensuite $P^{n,k+1}$ et $P \mathcal{P}_i^{n,k+1}$ par :

$$P_K^{n,k+1} = (P^{n,k} - \omega \text{DIV } Q^{n,k})_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \setminus (\mathcal{T}_{\mathcal{P}_{ih}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{jh}})$$

$$P_K^{n,k+1} = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{ih}} \cup \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{jh}}$$

$$P \mathcal{P}_i^{n,k+1} = P \mathcal{P}_i^{n,k+1} - \omega (\text{DIV } \mathcal{P}_i \cdot Q^{n,k} + Q \mathcal{P}_i^n)$$

- test de convergence

- Calculer $Q \mathcal{P}_j^n$ par :

$$Q \mathcal{P}_j^n = - \sum_{A \in \mathcal{AP}_{jh}} z_{A,\Omega} Q_A^n$$

D - Calcul de R^n, S_{Γ}^n —

1 - Calculer le second membre FR^n défini en (3.25)

2 - Modifier FR^n en $\overline{FR^n}$ de façon à tenir compte des conditions aux bords (1.15bis), (3.21) sur les arêtes de $\Gamma_{\mathcal{P}_{inj}}$, (3.30) sur les arêtes de $\Gamma_{\mathcal{P}_{prod}}$.

3 - Résoudre le système linéaire,

$$\overline{AR^n} \cdot R^n = \overline{FR^n}$$

(on trouve en particulier $R_A^n = 0, \forall A \in \mathcal{AP}_{inj} \cup \mathcal{AP}_{prod}$)

4 - Pour toute arête $B \in \Gamma_{imp} \cup \Gamma_{\mathcal{P}_{inj}}$, calculer $FEXT_B^n$ donné par (1.37) et résoudre l'équation inj à une variable réelle :

$$SEXT_B^n = \alpha^{-1}(FEXT_B^n)$$

E - Calcul de S^{n+1}

S^n est calculé par l'équation (3.28) dont le second membre FSK est donné par (3.26), (3.27).

On calcule le second membre FSK en effectuant une boucle sur les arêtes A de \mathcal{A}_h . On initialise donc FSK à zéro.:

$$FSK_1 = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad \forall i = 1, 2, \dots, ns(K)$$

Puis, pour chaque arête A de \mathcal{A}_h on procède de la façon suivante :

1 - Former la fonction de la saturation k :

$$F_A^n(k) = b_0(k) Q_A^n + \sum_{j=1}^2 b_j(k) Q_j^n$$

2 - Déterminer les éléments de K^+ et K^- adjacents à A
(K^+ (resp. K^-) élément aval (resp.amont) par rapport à \vec{v}_A où \vec{v}_A fixe le sens positif de traversée de A).

3 - Calculer les débits d'eau partiels $QWPA_\ell$, $\ell=1,2$ aux deux points de Gauss de l'arête A :

a) si $A \in \Gamma_{imp}$ $QWPA_\ell = 0$

b) si $A \in \Gamma_{inj}$ $QWPA_\ell = Q \mathcal{P}_{wA,\ell}^n$

c) si $A \in \Gamma_{prod}$ $QWPA_\ell = QWP_A^n(S^n(GA_\ell))$

d) si $A \notin (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_{prod})$ on utilise (1.28), (1.31),

$$\begin{aligned} \text{on pose : } \text{SIGNE} &= \text{signe} (S^{n+}(GA_1) - S^{n-}(GA_1)) \\ KMIN &= \text{Min} \{ S^{n+}(GA_1), -S^{n-}(GA_1) \} \\ KMAX &= \text{Max} \{ S^{n+}(GA_1), S^{n-}(GA_1) \} , \end{aligned}$$

$$\text{on détermine } QWPA_i = \text{SIGNE} \text{ Min } \left\{ \text{SIGNE} * F_A^n(k) \right\} ,$$

$$k \in [KMIN, KMAX]$$

$$\text{on pose } QWPA_i = QWPA_i + R_A^n.$$

On a alors, comme sous produit du calcul, le débit d'eau à travers l'arête A que l'on peut stocker éventuellement pour impression :

$$QW_A^n = \sum_{\ell=1}^2 \Theta_{A,\ell} QWPA_\ell$$

- 4 - Calculs des contributions de l'arête A à FSK^+ et FSK
pour $K \in \mathcal{C}_{inj,h} \cup \mathcal{C}_{prod,h}$

a) calculer les "débits partiels d'eau QWPK aux points de quadrature de l'élément K :

$$QWPK_{\ell} = QWP_A^n(S^n(GK_{\ell})) \quad \ell = 1, \dots, npi(K)$$

b) pour chaque sommet i de l'élément K, la contribution de l'arête A est donnée par (1.40) qui se réécrit :

$$FSK_i = FSK_i + Z_{AK} \sum_{\ell=1}^{npi(K)} \hat{AEGK}(\ell, \hat{A}, i) * QWPK_{\ell} \\ - Z_{AK} \sum_{\ell=1}^2 \Theta_{A\ell} * QWPA_{\ell} * v_{K,i}(GA_{\ell}) \\ \forall i=1, \dots, ns(K)$$

Notons que la dernière somme est la même pour les deux éléments K^+ et K^- et peut donc n'être calculé qu'une seule fois.

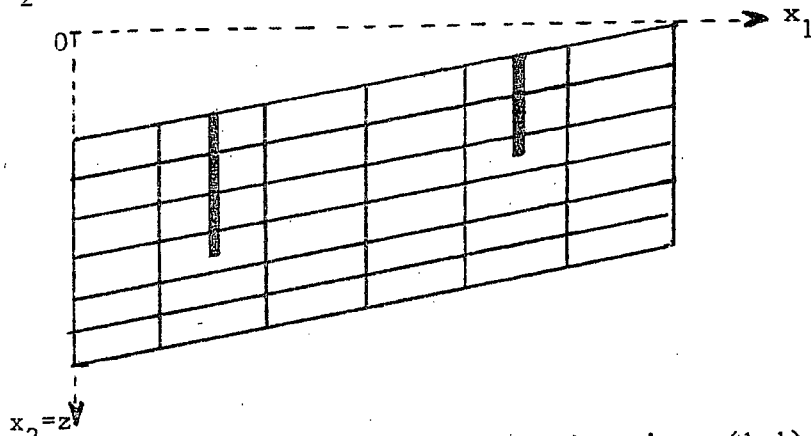
- 5 - Lorsque la boucle sur les éléments de A est terminée, les seconds membres FSK_i , $i=1, \dots, ns(K)$, $K \in \mathcal{C}_h$ sont calculés. On est maintenant amené à résoudre, pour chaque élément $K \in \mathcal{C}_h \setminus \mathcal{C}_{inj,h} \cup \mathcal{C}_{prod,h}$ le système linéaire à dimension $ns(K)$:

$$ASK(SK^{n+1} - SK^n) = \Delta t FSK$$

IV - LE MODELE x-z

4.1. - Le modèle x-z sans puits

On étudie maintenant les déplacements dans une coupe verticale. La première coordonnée x_1 est la coordonnée horizontale dans la coupe et la deuxième coordonnée x_2 est la profondeur z mesurée à partir du point du domaine Ω le plus haut.



Les équations continues sont toujours les équations (1.1), ..., (1.4). Cependant, il nous faudra ajouter aux conditions aux bords (1.5), ..., (1.10) des conditions aux bords correspondant à des frontières d'alimentation en huile :

Frontière alimentée en huile du type 1 Γ_o^1 :

$$P = P_d \quad (\text{pression donnée})$$

$$S = 0 \quad (\text{frontière saturée en huile})$$

Frontière alimentée en huile du type 2 Γ_o^2 :

$$\vec{q}_o \cdot \vec{v} = q_d \quad (\text{vitesse globale fixée})$$

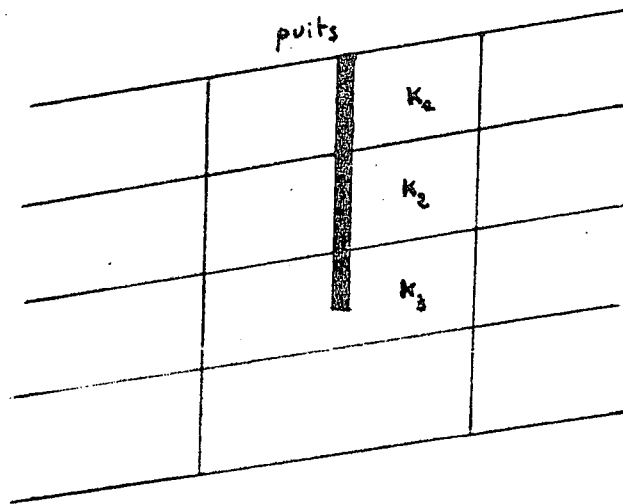
$$S = 0 \quad (\text{frontière saturée en huile})$$

Ces frontières d'alimentation en huile sont traitées de façon analogue aux frontières d'alimentation en eau et leur présence entraîne des modifications

évidentes dans les équations (1.12), ..., (1.14) ou dans leurs versions discrètes (1.12bis), (1.13bis), (1.14bis).

4.2. - Les puits verticaux

Ce qui est nouveau par rapport à ce qui a été fait auparavant, c'est l'introduction de puits verticaux et contrairement au modèle x-y ces puits sont introduits sans ôter d'éléments au domaine $\tilde{\Omega}$. Les puits verticaux seront supposés ne pas coïncider avec les arêtes verticales et se trouver être à distance à peu près égale des deux arêtes verticales les plus proches.



Notons \mathcal{P} un puits vertical et \mathcal{G}_h l'ensemble des éléments de \mathcal{T}_h percés par le puits

$$\mathcal{G}_h = \{ K \in \mathcal{T}_h \mid K \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \}$$

Les éléments K de \mathcal{G}_h seront aussi appelés des "couches".

On définit au puits \mathcal{P} les quantités suivantes

- P_K^n pression du puits dans la couche K ,
- $Q_{\mathcal{P}}^n, Q_{\mathcal{P}w}^n, Q_{\mathcal{P}o}^n$ débits totaux, d'eau et d'huile au puits,

- $Q\mathcal{P}_K^n$, $Q\mathcal{P}_{wK}^n$, $Q\mathcal{P}_{oK}^n$ débits totaux, d'eau, d'huile au puits dans la couche K.

Comme précédemment, les débits seront négatifs à l'injection et positifs à la production.

Une couche K sera privilégiée ; c'est celle où l'on peut mesurer les pressions. On la note K_0 (en général K_0 est la couche en surface ou la couche du fond du puits).

Le puits sera soit à débit total donné, soit à pression donnée dans la couche K_0 . Il sera aussi, soit injecteur, soit producteur.

Au puits \mathcal{P} nous aurons les relations suivantes :

$$(4.1) \quad Q\mathcal{P}_K^n = \alpha_K^n (P_K^n - P_{K_0}^n) + \beta_K^n$$

$$(4.2) \quad Q\mathcal{P}^n = \sum_{K \in \mathcal{E}_h} Q\mathcal{P}_K^n$$

les coefficients α_K^n , β_K^n étant donnés (calculés par un module puits). Compte tenu de la convention sur les débits on a $\alpha_K^n > 0$. Par ailleurs on rappelle que P_K^n est la pression dans l'élément K à l'instant $n \Delta t$.

De plus le débit en eau au puits dans la couche K est donné par la relation :

$$(4.3) \quad Q\mathcal{P}_{wK}^n = I_{\mathcal{P}} k_w(S^-)(P_K^n - P_{\mathcal{P}}^n)$$

où $I_{\mathcal{P}}$ est l'indice de production du puits \mathcal{P} .

S^- est la saturation "amont". Si le puits est injecteur $S^- = 1$. Si le puits est producteur, S^- est la saturation moyenne dans la maille K ou la moyenne de la trace sur le puits dans la maille K. Cette saturation sera prise à l'instant n dans le cas d'un traitement explicite ou à l'instant $n+1$ dans le cas d'un traitement implicite, le traitement implicite étant en fait préférable.

4.3. - Modifications des équations en pression

Concernant les équations en pression seules les équations (1.11) ou (1.11bis) sont modifiées. (1.11bis) s'écrit maintenant :

$$(4.4) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A \int_K \operatorname{div} \vec{s}_A dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CS}_h$$

$$(4.5) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A \int_K \operatorname{div} \vec{s}_A dx + Q \mathcal{P}_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{CS}_h$$

Deux cas se présentent suivant que la pression \mathcal{P}_{K_0} est imposée ou que c'est le débit total $Q \mathcal{P}$ qui est imposé.

Cas 1 : La pression \mathcal{P}_{K_0} dans la couche K_0 est imposée

Compte tenu de (4.1) l'équation (4.5) s'écrit :

$$(4.6) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A \int_K \operatorname{div} \vec{s}_A dx + \alpha_K \mathcal{P}_K = \alpha_K \mathcal{P}_{K_0} - \beta_K \quad \forall K \in \mathcal{CS}_h$$

Donc dans l'équations (1.24) la sous matrice diagonale inférieure ainsi que la partie inférieure du second membre sont modifiées.

Notons AB^n la matrice diagonale $(AB^n_{K,L})_{K,L \in \mathcal{CS}_h}$ telle que

$$AB^n_{K,L} = \begin{cases} \alpha_K^n & \text{si } K = L \in \mathcal{CS}_h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons FP^n le vecteur $(FP_K^n)_{K \in \mathcal{S}_h}$:

$$FP_K^n = \begin{cases} 0 & \text{si } K \notin \mathcal{S}_h \\ \alpha_K^n P_{K_0}^n - \beta_K^n & \text{si } K \in \mathcal{S}_h \end{cases}$$

Alors, les équations en débit-pression s'écrivent maintenant :

$$(4.7) \quad \begin{bmatrix} \tilde{A} D^n & -{}^t \text{DIV} \\ -\text{DIV} & -AB^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^n \\ P^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{FQ}^n \\ -FP^n \end{bmatrix}$$

Pour le résoudre, on va éliminer les pressions P_K^n correspondant aux éléments K appartenant à \mathcal{S}_h .

L'équation (4.6) donne :

$$(4.8) \quad P_K = \frac{1}{\alpha_K} [FP_K - (\text{DIV } Q)_K] \quad \forall K \in \mathcal{S}_h$$

et on porte ces valeurs de P_K dans les équations correspondant à la partie supérieure du système linéaire (4.7).

Notons $AB^{\mathcal{P}} = (AB^{\mathcal{P}}_{K,K'})_{K,K' \in \mathcal{S}_h}$ la matrice diagonale telle

que :

$$AB^{\mathcal{P}}_{K,K'} = \delta_K^{K'} \alpha_K$$

où $\delta_K^{K'}$ est le symbole de Kronecker, et notons $AB^{\mathcal{P}-1}$ l'inverse de $AB^{\mathcal{P}}$.

Notons ensuite, $\text{DIV}^{\mathcal{P}}$ la sous matrice de DIV correspondant aux éléments de \mathcal{S}_h et aux arêtes de \mathcal{S}_h .

On introduit alors la matrice $ADP^n = (ADP_{A,B}^n)_{A,B \in \mathcal{A}_h}$ telle que

$$ADP_{A,B}^n = \begin{cases} ({}^t \text{DIV } \mathcal{I} \cdot AB \mathcal{I}^{-1} \cdot \text{DIV } \mathcal{I})_{A,B} & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont arêtes d'un élément de } \mathcal{T}_h. \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

la matrice AD^* telle que

$$AD^{n*} = AD + ADP^n,$$

et DIV^* la matrice $(\text{DIV}_{K,A}^*)_{A \in \mathcal{A}_h, K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h}$ telle que

$$\text{DIV}_{K,A}^* = \text{DIV}_{K,A} \quad \forall A \in \mathcal{A}_h, \forall K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h$$

On notera encore FQ^{*n} le vecteur $(FQ_A^{*n})_{A \in \mathcal{A}_h}$ tel que

$$FQ_A^{*n} = \begin{cases} FQ_A^n & \text{si } A \text{ n'est pas une arête d'un élément de } \mathcal{CP}_h \\ FQ_A^n + ({}^t \text{DIV } \mathcal{I} \cdot AB \mathcal{I}^{-1} \cdot FP_K^n)_A & \text{sinon} \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$FQ_A^{*n} = \begin{cases} FQ_A^n & \text{si } A \text{ n'est pas une arête d'un élément de } \mathcal{CP}_h \\ FQ_A^n + \sum_{\substack{K \in \mathcal{CP}_h \\ A \subset \partial K}} \text{DIV}_{A,K} \frac{1}{\alpha_K} FP_K^n & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, notons P^{n*} le vecteur $(P_K^{n*})_{K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h}$ tel que

$$P_K^{n*} = P_K^n \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \setminus \mathcal{CP}_h.$$

Alors le système (4.7) est équivalent à :

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} \overline{AD}^{n*} & -t_{DIV}^* \\ -DIV^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^n \\ P^{*n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{FQ}^{*n} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Une itération de la méthode du Lagrangien augmenté s'écrit donc maintenant de la façon suivante $P^{n,k}$ étant donné, on calcule $Q^{n,k}$ puis $P^{n,k+1}$ par :

$$(4.10) \quad (\overline{AD}^{*n} + \omega t_{DIV}^* \cdot DIV^*) Q^{n,k} = t_{DIV}^* \cdot P^{*n,k} + \overline{FQ}^{*n}$$

$$(4.11) \quad P^{*n,k+1} = P^{*n,k} - \omega DIV^* Q^{n,k}$$

Lorsque l'algorithme a convergé, on calcule alors les pressions dans les éléments de \mathcal{TP}_h par la relation (4.8), et le débit au puits grâce à (4.1) et (4.2).

Cas 2 : Le débit total $Q\mathcal{P}$ est imposé

On élimine $P\mathcal{P}_{K_0}^n$ entre les équations (4.1) et (4.2). En sommant les équations (4.1) et K_0 en utilisant (4.2) on trouve :

$$Q\mathcal{P}^n = - \left(\sum_{K \in \mathcal{TP}_h} \alpha_K^n \right) P\mathcal{P}_{K_0}^n + \sum_{K \in \mathcal{TP}_h} (\alpha_K^n P_K^n + \beta_K^n)$$

On en déduit une expression de $P_{K_0}^n$ que l'on porte alors dans (4.1). On trouve, pour tout $K \in \mathcal{C}_h$:

$$(4.12) \quad Q_{\mathcal{C}_K}^n = \bar{\alpha}_K^n Q_{\mathcal{C}}^n + \alpha_K^n (1 - \bar{\alpha}_K^n) P_K^n - \alpha_K^n \sum_{\substack{K' \in \mathcal{C}_h \\ K' \neq K}} \bar{\alpha}_{K'}^n P_{K'}^n \\ + (1 - \bar{\alpha}_K^n) \beta_K^n - \bar{\alpha}_K^n \sum_{\substack{K' \in \mathcal{C}_h \\ K' \neq K}} \beta_{K'}^n$$

où

$$\bar{\alpha}_K^n = \frac{\alpha_K^n}{\sum_{K' \in \mathcal{C}_h} \alpha_{K'}^n}$$

On porte alors (4.12) dans (4.5).

On note AB^n la matrice symétrique $(AB_{K,L}^n)_{K,L \in \mathcal{C}_h}$ telle que :

$$(4.13) \quad AB_{K,L}^n = \begin{cases} 0 & \text{si } K \text{ ou } L \notin \mathcal{C}_h \\ \alpha_K^n (1 - \bar{\alpha}_K^n) & \text{si } K \text{ ou } L \in \mathcal{C}_h \\ -\alpha_K^n \bar{\alpha}_L^n & \text{si } K \text{ et } L \in \mathcal{C}_h \end{cases}$$

On note FP^n le vecteur $(FP_K^n)_{K \in \mathcal{C}_h}$ tel que

$$(4.14) \quad FP_K^n = \begin{cases} 0 & \text{si } K \notin \mathcal{C}_h \\ -(1 - \bar{\alpha}_K^n) \beta_K^n + \bar{\alpha}_K^n \sum_{\substack{K' \in \mathcal{C}_h \\ K' \neq K}} \beta_{K'}^n & \text{si } K \in \mathcal{C}_h \end{cases}$$

Alors le système en débit-pression s'écrit encore sous la forme

$$(4.15) \quad \begin{bmatrix} \bar{A}D^n & -{}^t\text{DIV} \\ -\text{DIV} & -AB^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^n \\ P^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}Q^n \\ -FP^n \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système on procède comme pour le cas précédent en éliminant dans (4.15) les pressions P_K^n pour $K \in \mathcal{V}_h$.

Cependant, dans ce cas, l'élimination des pressions P_K^n pour $K \in \mathcal{V}_h$ est ici un peu plus compliquée car la matrice AB^n n'est pas diagonale.

Notons $AB^{\mathcal{P}} = (AB^{\mathcal{P}}_{K,K'})_{K,K' \in \mathcal{V}_h}$ la matrice

$$AB^{\mathcal{P}}_{K,K'} = \begin{cases} \alpha_K(1 - \bar{\alpha}_K) & \text{si } K = K' \\ -\alpha_K \bar{\alpha}_{K'} & \text{si } K \neq K' \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que comme $\alpha_K > 0$, AB est inversible et on note $AB^{\mathcal{P}-1}$ son inverse.

Alors comme dans le cas précédent on introduit la matrice,

$$ADP^n_{A,B} = \begin{cases} ({}^t\text{DIV}^{\mathcal{P}} \cdot AB^{\mathcal{P}-1} \cdot \text{DIV}^{\mathcal{P}})_{A,B} & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont arêtes d'un élément de } \mathcal{T}_h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la matrice $AD^{n*} = AD^n + ADP^n$, puis le second membre FQ^{*n}

$$FQ^{*n}_A = \begin{cases} FQ^n_A + ({}^t\text{DIV}^{\mathcal{P}} \cdot AB^{\mathcal{P}-1} \cdot FP^n)_A & \text{si } A \text{ est une arête d'un élément de } \mathcal{T}_h \\ FQ^n_A & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -AD^{*n} & -t_{DIV}^* \\ -DIV^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^n \\ P^{n*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -FQ^{*n} \\ 0 \end{bmatrix}$$

que l'on résoud par la méthode du Lagrangien Augmenté comme dans le cas 1. Une fois cette résolution effectuée pour $K \in \mathcal{V}_h$, on calcule, Q_K^n grâce à (4.5), qui s'écrit $Q_K^n = - \sum_{A \in \partial K} DIV_{K,A} Q_A$ et de (4.1), on déduit $P_{K_0}^n$.

4.4 - Modification des équations en saturation

Concernant les équations en saturation, seules les équations (1.18) ou leurs écritures équivalentes (1.18bis) ou (1.41) sont modifiées car il faut ajouter dans le bilan en eau la contribution du puits.

Notons $D\mathcal{P}_K$ le vecteur $(D\mathcal{P}_{K_i})_{i=1, \dots, ns(K)}$ tel que

$$D\mathcal{P}_{K_i} = \begin{cases} \frac{1}{mes(\mathcal{P}^n K)} \int_{\mathcal{P}^n K} v_{K,i} d\gamma & \text{si } K \in \mathcal{V}_h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'équation (1.41) est inchangée si $K \notin \mathcal{V}_h$ mais si $K \in \mathcal{V}_h$ elle s'écrit :

$$(4.14) \quad ASK \cdot (SK^{n+1} - SK^n) = \Delta t \{ \tilde{F}SK^n + Q_{w_K}^n \cdot D\mathcal{P}_K \} \quad \forall K \in \mathcal{V}_h$$

où $Q_{w_K}^n$ le débit en eau au puits dans la couche K est donné par (4.3).

Dans (4.3) $I_{\mathcal{P}}$ est une fonction donnée de la saturation, $P_K^n - P_{\mathcal{P}_K}^n$ ont été calculés et deux cas se présentent suivant que \mathcal{P} est un puits injecteur ou producteur.

Cas 1 : \mathcal{P} est un puits injecteur

On prend dans (4.3) $S^- = 1$. Alors $Q\mathcal{P}_K^n$ est calculé par (4.3) et est connu dans l'équation (4.14). (4.14) n'est alors qu'un système linéaire de petite dimension à résoudre pour calculer SK^{n+1} .

Cas 2 : \mathcal{P} est un puits producteur

Alors S^- est une fonction de SK^n si le traitement du puits est explicite. Dans ce cas encore $Q\mathcal{P}_K^n$ est calculé par (4.3) et est donc connu dans l'équation (4.14).

Cependant un traitement implicite du puits est meilleur. Dans ce cas S^- est une fonction de SK^{n+1} et il en est de même de $Q\mathcal{P}_K^n$. Bien que SK^n soit connu, on notera néanmoins cette dépendance $Q\mathcal{P}_K^n(SK^{n+1} - SK^n)$ pour des raisons pratiques.

Alors on écrit (4.14) sous la forme :

$$ASK \cdot (SK^{n+1} - SK^n) - \Delta t Q\mathcal{P}_K^n (SK^{n+1} - SK^n) \cdot DSK = \Delta t \cdot \tilde{F}SK^n \quad \forall K \in \mathcal{K}_h$$

Ainsi, pour tous les éléments de \mathcal{E}_h , on a un petit système non linéaire de dimension $ns(K)$ à résoudre.

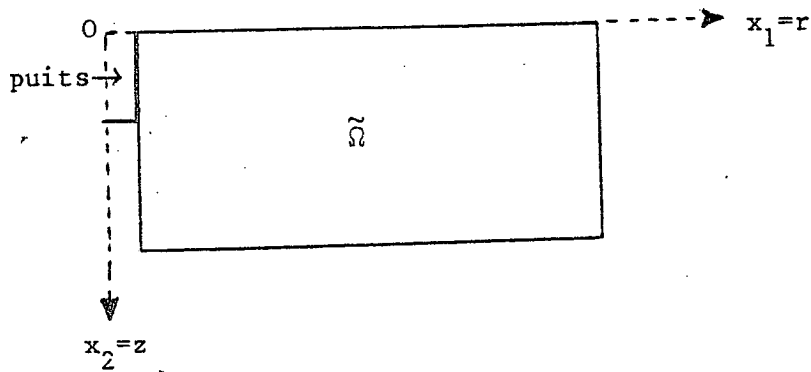
On le résoudra soit par une méthode itérative de point fixe si elle converge ou par la méthode de Newton.

V - LE MODELE r-z

5.1. - Les équations et les conditions sur les bords autres que le puits

On suppose que les déplacements sont à symétrie radiale dans le voisinage d'un puits et on résout les équations dans un secteur d'angle θ . $\tilde{\Omega}$ est alors un domaine bidimensionnel.

La première coordonnée x_1 est la coordonnée radiale et la deuxième coordonnée x_2 est la profondeur.



L'origine des profondeurs x_2 est placée au sommet de $\tilde{\Omega}$ mais l'origine des x_1 est placée un peu à l'extérieur de $\tilde{\Omega}$ pour éviter des problèmes d'intégration numérique.

On néglige les effets d'hétérogénéité capillaire, peu importants au voisinage du puits.

Les équations des déplacements s'écrivent alors :

Equations en pression

$$(5.1) \quad \text{div } \vec{q}_0^* = 0$$

$$(5.2) \quad \vec{q}_0^* = - \Psi^*(x) \, d(S) \, \nabla P + d(S) \, \gamma_1(S) \vec{q}_1^*$$

Equations en saturation:

$$(5.3) \quad \varphi^* \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } \vec{\varphi}_w^* = 0$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} \vec{\varphi}_w^*(x,t) = \vec{r}^*(x,t) + \vec{f}^*(x,t,S(x,t)) \\ \vec{r}^* = -\Psi^*(x) \, d(S(x,t)) \, \nabla \alpha(S(x,t)) \\ \vec{f}^*(x,t,k) = b_0(k) \vec{q}_0^*(x,t) + b_1(k) \vec{q}_1^*(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}^* &= x_1 \vec{r} \\ \Psi^* &= x_1 \Psi \end{aligned} \quad \begin{aligned} \vec{q}_j^* &= x_1 \vec{q}_j \\ \Psi^* &= x_1 \Psi \end{aligned}, \quad j = 1, 2$$

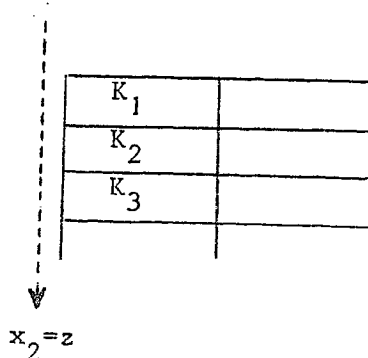
Les équations (5.1), ..., (5.4) ont donc une forme identique à (1.1), ..., (1.4). On y a simplement remplacé les \vec{r} , \vec{q}_j , φ , Ψ par \vec{r}^* , \vec{q}_j^* , φ^* , Ψ^* .

Cependant on fera attention dans la discrétisation au fait suivant. Dans la pratique les fonctions φ et Ψ sont approchées par des fonctions constantes par élément mais évidemment φ^* et Ψ^* ne seront pas constants par élément. On devra en tenir compte et utiliser les formules d'intégration appropriées pour calculer les matrices $\tilde{A}D^n$, $\tilde{A}R$, ASK , $\tilde{A}\tilde{\Gamma}J^n$, $J = 1, 2$ et, pour faire la différence on les notera $\tilde{A}D^{*n}$, $\tilde{A}R^*$, ASK^* , $\tilde{A}\tilde{\Gamma}J^{*n}$, $J = 1, 2$.

Concernant les conditions sur les bords autres que le puits, les frontières seront encore du type Γ_{imp} ou Γ_ℓ^j , $\ell = 0, w$ ou $j = 1, 2$ à ceci près que les \vec{r}^* et \vec{q}_j^* prennent la place des \vec{r} et \vec{q}_j .

5.2. - Introduction du puits vertical

Dans le modèle r - z , le puits vertical \mathcal{P} est à l'extérieur du domaine $\tilde{\Omega}$.



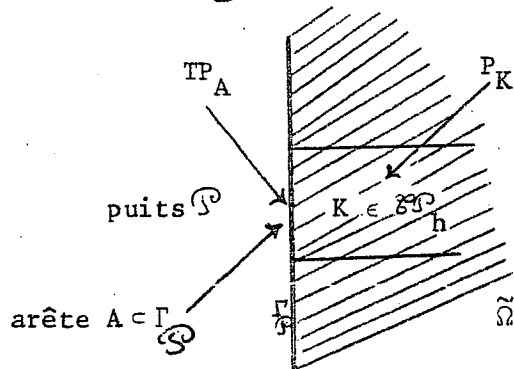
On note $\Gamma_{\mathcal{P}}$ le bord de $\tilde{\Omega}$ adjacent au puits \mathcal{P} .

On reprendra les notations du § 4 concernant les puits verticaux à ceci près que $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}^h$ est maintenant l'ensemble des éléments de \mathcal{T}_h qui ont une arête appartenant à $\Gamma_{\mathcal{P}}$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}^h = \{ K \in \mathcal{T}_h \mid \exists A \in \mathcal{A}_h \quad A \subset \partial K \cap \Gamma_{\mathcal{P}} \}$$

De plus on préférera maintenant indiquer les couches non pas par les éléments K de \mathcal{T}_h mais par les arêtes A de $\Gamma_{\mathcal{P}}$.

Pour chaque couche A de $\Gamma_{\mathcal{P}}$ on introduit l'inconnue TP_A , trace sur l'arête $A \subset \Gamma_{\mathcal{P}}$, extérieure à $\tilde{\Omega}$, de la pression



Au puits \mathcal{P} nous aurons les relations suivantes :

$$(5.5) \quad Q_{\mathcal{P}}^n = \alpha_A^n (TP_A^n - P_{A_0}^n) + \beta_A^n$$

$$(5.6) \quad Q_{\mathcal{P}}^n = \sum_{A \in \Gamma_{\mathcal{P}}} Q_{\mathcal{P}}^n$$

$$(5.7) \quad Q_{\mathcal{P}}^n = I_{\mathcal{P}} k_w(S^-) (TP_A^n - P_{A_0}^n)$$

où $\alpha_A^n > 0$, $I_{\mathcal{P}} > 0$ sont des coefficients calculés par le module puits, S^- est la saturation "amont" et A_0 est la couche à laquelle on mesure la pression au puits.

Si \mathcal{P} est injecteur on prendra $S^- = 1$ et si \mathcal{P} est producteur S^- sera sur chaque arête la trace sur $\Gamma_{\mathcal{P}}$ de la saturation calculée dans $\tilde{\Omega}$ prise à l'instant n pour un traitement explicite ou à l'instant $(n+1)$ pour un traitement implicite.

Nous allons voir comment intégrer les relations (5.5), (5.6), (5.7) aux équations écrites dans $\tilde{\Omega}$.

Comme le puits \mathcal{P} est en dehors du domaine, les modifications à faire dans les équations générales du §1 se rapprocheront plus de celles du modèle x-y (cf §3) que de celles du cas du modèle x-z (cf. §4) où le puits était à l'intérieur du domaine.

5.3. - Modification des équations en pression

L'équation (1.11bis) s'écrit encore

$$(5.8) \quad \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A^{*n} \int_K \operatorname{div} \vec{s}_A dx = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

Par contre, dans les équations (1.12) et (1.12bis), il faut ajouter maintenant la contribution de la frontière $\Gamma_{\mathcal{P}}$.

L'équation (1.11bis) s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} & \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A^{*n} \int_{\tilde{\Omega}} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{*-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} P_K^n \int_{\tilde{\Omega}} v_K \operatorname{div} \vec{s}_B dx = \\ & = - \sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_h \\ A \subset \Gamma_{\mathcal{P}}}} \int_{A \cap B} TP_A^n \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}_{\tilde{\Omega}} d\gamma + H^*(\vec{s}_B) \quad \forall B \in \mathcal{A}_h \quad B \notin (\Gamma_{\text{imp}} \cup \Gamma_w^2) \end{aligned}$$

où

$$H^*(\vec{s}_B) = \sum_{A \in \mathcal{A}_h} Q_A^{*n} \int_{\tilde{\Omega}} \psi^{*-1} \gamma_1(S^n) \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx - P_{dB} \int_{\tilde{\Omega}} \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}_{\tilde{\Omega}} d\gamma$$

Par continuité des débits on a :

$$(5.9) \quad Q_{\mathcal{P}}^n = Z_{A, \tilde{\Omega}} Q_A^{*n} \quad \forall A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$$

De (5.5), (5.9) on déduit alors en éliminant TP_A^n :

$$(5.10) \quad \sum_{A \in \partial_h} Q_A^{*n} \tilde{\Omega} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{*-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx + Q_B^{*n} \cdot \frac{1}{\alpha_B^n} \left(\int_{B \cap \Gamma} \vec{s}_B \cdot \vec{\nu} d\gamma \right)^2 \\ - \sum_{K \in \mathcal{O}_h} P_K^n \int v_K \operatorname{div} \vec{s}_B dx + P_{A_0}^n \int_{B \cap \Gamma_{\mathcal{P}}} \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}^{\tilde{\Omega}} d\gamma \\ = \frac{\beta_B^n}{\alpha_B^n} \int_{B \cap \Gamma_{\mathcal{P}}} \vec{s}_B \cdot \vec{\nu}^{\tilde{\Omega}} d\gamma + H^*(\vec{s}_B) \quad \forall B \in \mathcal{O}_h, B \notin (\Gamma_{\text{imp}} \cup \Gamma_w^2)$$

Les équations (5.10) sont accompagnées des conditions aux bords (1.13bis) que l'on écrit :

$$(5.11) \quad Q_A^* = 0 \quad \forall A \in \partial_h, A \in \Gamma_{\text{imp}} \quad Z_{A, \tilde{\Omega}} Q_A^* = Q_{dA} \quad \forall A \in \partial_h, A \in \Gamma_w^2$$

Par ailleurs de (5.6), (5.9) on déduit

$$(5.12) \quad \sum_{A \in \Gamma_{\mathcal{P}}} Z_{A, \tilde{\Omega}} Q_A^{*n} - Q_{\mathcal{P}}^n = 0$$

On a donc à résoudre le système d'équations (5.8), (5.10), (5.11), (5.12) avec comme inconnues Q^* , P et soit $Q_{\mathcal{P}}$, soit $P_{A_0}^n$.

Considérons donc les deux cas suivants : $Q_{\mathcal{P}}$ donné et $P_{A_0}^n$ inconnu, et l'inverse.

Cas 1 : $Q \circledast^n$ est donné et $P \circledast^n_{A_0}$ est inconnu

Introduisons le vecteur uniligne $\text{DIV} \circledast = (\text{DIV} \circledast_A)_{A \in \mathcal{A}_h}$ tel que

$$\text{DIV} \circledast_A = -Z_{A, \tilde{\Omega}} \quad A \in \Gamma_{\circledast}$$

Introduisons ensuite $\text{FPDIR}^* = (\text{FPDIR}^*_A)_{A \in \mathcal{A}_h}$ tel que

$$\text{FPDIR}^*_A = \begin{cases} Z_{A, \tilde{\Omega}} P^n_{dA} & \text{si } A \in \Gamma^1_w \\ Z_{A, \tilde{\Omega}} \frac{\beta^n_A}{\alpha^n_A} & \text{si } A \in \Gamma_{\circledast} \\ 0 & \text{si } A \notin \Gamma^1_w \cup \Gamma_{\circledast} \end{cases}$$

et on introduit FQ^{*n} tel que

$$\text{FQ}^{*n} = A \Gamma_1^{*n} \cdot Q_1^* - \text{FPDIR}^* .$$

Alors le système (5.8), (5.10), (5.11), (5.12) s'écrit sous la forme matricielle :

$$(5.13) \quad \begin{bmatrix} \tilde{A} D^* & -{}^t \text{DIV} & -{}^t \text{DIV} \circledast \\ -\text{DIV} & 0 & 0 \\ -\text{DIV} \circledast & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \\ P \circledast_{A_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F} Q^* \\ 0 \\ -Q \circledast \end{bmatrix}$$

Le système (5.13) peut être interprété comme un problème de point selle pour lequel $P \circledast_{A_0}$ est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte (5.12) et dont le lagrangien \mathcal{L} est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{na} \times \mathbb{R}^{ne} \times \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{L}(S, V, V \circledast) = \langle \frac{1}{2} \tilde{A} D^* \cdot S - \tilde{F} Q^n, S \rangle - \langle V, \text{DIV} S \rangle - V \circledast (\text{DIV} \circledast \cdot S - Q \circledast)$$

où le troisième terme du membre de droite est un produit dans \mathbb{R} .

Après avoir augmenté le lagrangien comme au §3.2, on écrit l'algorithme d'Uzawa, k étant l'indice des itérations :

- $k = 0, p^{n,0} = p^{n-1}, p_{A_0}^{n,0} = p_{A_0}^{n-1}$
- $p^{n,k}, p_{A_0}^{n,k}$ étant donné, on calcule $q^{n,k}$ par :

$$(5.14) \quad (\overline{AD}^{*n} + \omega(t_{DIV \cdot DIV} + t_{DIV \mathcal{G} \cdot DIV \mathcal{G}})) q^{n,k} = t_{DIV \cdot p^{n,k}} + t_{DIV \mathcal{G} \cdot (p_{A_0}^{n,k} + \omega q \mathcal{G}^n)} + \overline{FQ}^{*n}$$

On calcule ensuite $p^{n,k+1}$ et $p_{A_0}^{n,k+1}$ par,

$$(5.15) \quad p^{n,k+1} = p^{n,k} - \omega \cdot DIV \ q^{n,k}$$

$$(5.16) \quad p_{A_0}^{n,k+1} = p_{A_0}^{n,k} - \omega(DIV \mathcal{G} \cdot q^{n,k} - q \mathcal{G}^n)$$

- test de convergence.

Cas 2 : $p_{A_0}^{n,k}$ est donné et $q \mathcal{G}^n$ est inconnu

La relation (5.12) n'étant plus une contrainte, l'algorithme d'Uzawa s'écrit maintenant, k étant l'indice des itérations :

$$- k = 0, p^{n,0} = p^{n-1}$$

- $p^{n,k}$ étant donné, on calcule $q^{n,k}$ par :

$$(5.17) \quad (\overline{AD}^{*n} + \omega t_{DIV \cdot DIV}) \cdot q^{n,k} = t_{DIV \cdot p^{n,k}} + t_{DIV \mathcal{G} \cdot p_{A_0}^{n,k}} + \overline{FQ}^{*n}$$

- on calcule $p^{n,k+1}$ par (5.15)

- test de convergence

lorsque l'algorithme a convergé on trouve $q \mathcal{G}^n$ grâce à (5.12).

Dans les deux cas, une fois Q^n et $P_{A_0}^n$ calculés, on peut calculer TP_A^n , $A \in \Gamma_{\mathcal{D}}$ par (5.5) et P_A^n , $A \in \Gamma_{\mathcal{D}}$ par la relation de pression hydrostatique :

$$P_A^n \equiv P_{A_0}^n + \gamma_A^n \quad \forall A \in \Gamma_{\mathcal{D}}$$

où γ_A^n est un coefficient calculé par le module puits.

5.4. - Modification des équations en saturation

A l'équation (1.14bis) il faut ajouter la contribution de la frontière $\Gamma_{\mathcal{D}}$.

Sur $\Gamma_{\mathcal{D}}$ on négligera les effets capillaires, ce qui est raisonnable puisque les vitesses sont grandes au voisinage du puits.

R^* vérifiera donc les équations :

$$(5.18) \quad \sum_{A \in \mathcal{C}_h} R_A^{*n} \int_{\Omega} d(S^n) \psi^{*-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx = \int_{\Omega} \alpha(S^n) dw \vec{s}_B dx \\ - \alpha(1) \int_{(\Gamma_w^1 \cup \Gamma_w^2) \cap B} \vec{s}_B \cdot \vec{v} d\gamma$$

$$\forall B \in \mathcal{C}_h$$

$$\forall B \notin (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_{\mathcal{D}})$$

$$(5.19) \quad R_A^{*n} = 0 \quad \forall A \in \mathcal{C}_h, A \in \Gamma_{\mathcal{D}}$$

ainsi que les conditions au (1.15bis) sur le bord Γ_{imp} .

On écrira le système (5.18), (5.19) et (1.16bis) sous la forme matricielle.

$$\overline{\tilde{A}R}^{n*} \cdot R^{n*} = \overline{\tilde{F}R}^{n*}$$

où les matrices $\tilde{A}R^{n*}$ et $\tilde{F}R^{n*}$ sont construites d'une façon analogue au paragraphe 1 et la barre inférieure correspond aux modifications locales dues à la conditions (1.15bis) et la barre supérieure à celles dues à (5.19).

Une fois calculé R^{n*} , on peut calculer $S_{\Gamma_{imp}}^n$ comme auparavant.

Concernant le calcul de la saturation SK^{n+1} , on note :

$$(5.20) \quad \begin{cases} F_A^*(k) = b_0(k) Q_A^* + b_1(k) Q_{1A}^* & \forall A \in \mathcal{C}_h, \forall k \in [0,1] \\ QWP_A^*(k) = R_A^* + F_A^*(k) & \forall A \in \mathcal{C}_h, \forall k \in [0,1] \end{cases}$$

et on définit,

$$(5.21) \quad \begin{cases} \forall A \in \mathcal{A}_h, \forall \gamma \in A \\ F_A^{*n}(\xi(\gamma)) = \text{signe}(S^{n+}(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) \cdot \text{Min} \{ \text{signe}(S^{n+}(\gamma) - S^{n-}(\gamma)) F_A^{*n}(k) \} \\ k \in I(S^{n+}(\gamma), S^{n-}(\gamma)) \\ \text{où } + \text{ et } - \text{ correspond à l'aval et à l'amont pour le sens positif de} \\ \text{traversée de } A. \end{cases}$$

Alors pour calculer la saturation, il faut résoudre :

$$(5.22) \quad ASK^* \cdot (SK^{n+1} - SK^n) = \Delta t \cdot FSK^{*n} \quad \forall K \in \mathcal{C}_h$$

avec

$$(5.23) \quad FSK_i^* = \sum_{A \subset \partial K} \int_K QWP^*(S^n) \vec{s}_A \cdot \nabla v_{K,i} dx - \frac{1}{npi(A)} \sum_{\ell=1}^{npi(A)} [QWP_A^*(\xi(GA_\ell)) v_{K,i}(GA_\ell)]$$

$\forall K \in \mathcal{C}_h, \forall i = 1, \dots, ns(K)$
et pour $\ell = 1, \dots, npi(A)$

$$(5.24) \quad QWP_A(\xi(GA_\ell)) = \begin{cases} = 0 & \text{si } A \subset \Gamma_{imp} \\ = z_{A,\tilde{\Omega}} QSw_A^n & \text{si } A \subset \Gamma_S \\ \text{donné par (5.20), (5.21)} & \text{si } A \in \mathcal{A}_h, A \notin (\Gamma_{imp} \cup \Gamma_S) \end{cases}$$

et où QSw_A^n vérifie la relation (5.7).

Selon que \mathcal{S} est un puits d'injection ou de production, le calcul de QSw_A^n est différent.

Cas 1 : \mathcal{S} est un puits d'injection

Dans ce cas, on prend pour saturation amont $S^- = 1$ dans (5.7) et on calcule ainsi le débit d'eau $Q\mathcal{S}_w^n_A$ qu'on porte dans (5.24). On calcule enfin SK^{n+1} en résolvant les systèmes linéaires (5.22).

Cas 2 : \mathcal{S} est un puits de production

Pour un traitement explicite, on choisit pour S^- dans (5.7) la trace de S^n sur $\Gamma_{\mathcal{S}}$ et on calcule encore le débit d'eau $Q\mathcal{S}_w^n_A$ qu'on porte dans (5.24) avant de calculer SK^{n+1} en résolvant les systèmes linéaires (5.22).

Cependant, il est préférable de traiter implicitement le puits de production. On choisit alors pour S^- dans (5.7) la trace de S^{n+1} sur $\Gamma_{\mathcal{S}}$. Alors le débit d'eau $Q\mathcal{S}_w^n_A$ dépend de SK_A^{n+1} si K_A dénote l'élément adjacent à A, et il en est de même de FSK_A^{n*} .

En écrivant cette dépendance comme une dépendance de $SK_A^{n+1} - SK_A^n$, pour tous les éléments $K \in \mathcal{E}_h$ du bord du puits, on est amené à résoudre les systèmes non linéaires de dimension $ns(K)$:

$$ASK^* \cdot (SK^{n+1} - SK^n) = \Delta t \cdot \tilde{FSK}^{*n} (SK^{n+1} - SK^n) \quad \forall K \in \mathcal{E}_h$$

pour calculer les saturations SK^{n+1} dans les mailles touchant le puits. Pour les autres mailles le système (5.22) reste un système linéaire.

5.5 - Intégration numérique

Le calcul des matrices \tilde{AD}^* , \tilde{AR}^* et $A\tilde{I}J^*$ étant analogue, considérons par exemple \tilde{AD}^* . Pour calculer \tilde{AD}^* , on doit calculer des intégrales du type :

$$\int_K \frac{1}{d(S)} \Psi^{*-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx = \int_K \frac{1}{d(S)} \Psi^{-1} \cdot \frac{1}{x_1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx \quad \forall A, B \in \mathcal{A}_h$$

A cause de la division par x_1 , nous utiliserons des formules d'intégration plus précise qu'au §1.7. Dans le modèle r - z , le domaine $\tilde{\Omega}$ est un carré qu'on discrétisera par des rectangles de côtés parallèles aux axes.

Comme c'est seulement dans la direction x_1 qu'il est nécessaire d'augmenter l'ordre de la formule d'intégration, nous prendrons donc trois points de Gauss dans la direction x_1 au lieu de deux précédemment, tout en gardant deux dans la direction x_2 .

Concernant la matrice ASK^* , il faut calculer

$$\int_K x_1 \phi v_i v_j dx = J_K \phi|_K \int_{\hat{K}} \hat{x}_1 \hat{v}_i \hat{v}_j d\hat{x}$$

et cela serait fait exactement à l'aide de la formule de Gauss à quatre points sur K (deux dans la direction x_1 et deux dans la direction x_2).

ANNEXE 1 - UNE METHODE RAPIDE DE RESOLUTION DES EQUATIONS EN PRESSION.

A1.1 Introduction

La méthode du lagrangien augmenté pour résoudre le système des équations en pression-vitesse issu de la formulation mixte présente l'inconvénient d'avoir le paramètre ω à ajuster. C'est pourquoi nous allons présenter ici une deuxième méthode [7] qui ne nécessite pas d'ajustement de paramètre. De plus cette deuxième méthode est plus rapide car elle se réduit essentiellement à la résolution d'un seul système linéaire de dimension na , alors que la méthode du lagrangien augmenté devait résoudre un système de même taille autant de fois que l'on itérerait. Enfin, dernier avantage, la méthode que nous allons proposer, calcule en même temps une approximation de la pression sur les arêtes qui possède des propriétés de super convergence [16].

A1.2 Une formulation équivalente des équations en pression

Nous nous plaçons dans le cadre du Chapitre I. Précédemment la vitesse \vec{q}_0 a été approchée dans l'espace \vec{X}_h^0 dont les éléments ont leurs débits à travers les arêtes continus. Maintenant, nous n'allons plus exiger cette continuité pour l'espace d'approximation, mais au contraire l'écrire explicitement.

Introduisons donc l'espace \vec{X}_h^0 des fonctions de $\vec{\Omega}$ dans \mathbb{R}^2 dont chaque composante est un polynôme de degré ≤ 1 sur chaque élément de \mathcal{T}_h et dont le flux à travers chaque arête A de \mathcal{T}_h est constant sur A (mais non continu). Sa dimension est $3 \times nt + 4 \times nq$. C'est dans cet espace qu'on approchera maintenant la vitesse.

Définissons aussi $N^0 = \mathbb{R}^{na}$, espace dans lequel on approche la trace des pressions sur les arêtes notée $TP = (TP_A)_{A \in \mathcal{A}_h}$.

On va maintenant calculer $(\vec{q}_{Oh}^{on}, p^{on}, TP^n) \in \vec{X}_h^0 \times M_h^0 \times N^0$ satisfaisant :

$$(A1.1) \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{q}_0^{on} \cdot \vec{s} \, dx - \int_K p^{on} \operatorname{div} \vec{s} \, dx + \int_{\partial K} TP^n(\vec{s} \cdot \vec{\nu}_K \, d\gamma) \right\} = \int_{\tilde{\Omega}} \sum_{j=1}^2 \gamma_j(S^n) \psi^{-1} \vec{q}_j \cdot \vec{s} \, dx \quad \forall \vec{s} \in \vec{X}_h^0,$$

$$(A1.2) \quad TP_A^n = p_{d|A}^n \quad \forall A \in \Gamma_w^1,$$

$$(A1.3) \quad \int_{\tilde{\Omega}} \operatorname{div} \vec{q}_{Oh}^{on} \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad \forall \vec{v} \in M^0,$$

$$(A1.4) \quad A \in \mathcal{A}_h \quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_A \vec{q}_{Oh}^{on} \cdot \vec{\nu}_K \, \mu \, d\gamma = \int_{\Gamma_w^2} q_d^n \, \mu \, d\gamma \quad \forall \mu \in N^0, \\ \mu_A = 0, \quad \forall A \in \Gamma_w^{-1}.$$

Notons que, pour toute arête $A = \partial K \cap \partial K'$, intérieure à $\tilde{\Omega}$, si l'on choisit μ tel que $\mu_A = 1$ et $\mu_{A'} = 0$ si $A' \neq A$, alors l'équation (A1.4) implique

$$(\vec{q}_{Oh}^{on} \cdot \vec{\nu}_K + \vec{q}_{Oh}^{on} \cdot \vec{\nu}_{K'})|_A = 0.$$

L'équation (A1.4) exprime donc en particulier la continuité du débit de \vec{q}_{Oh}^{on} à travers A .

Pour toute arête $A \in \Gamma_{imp}^1$, en choisissant μ comme ci-dessus, l'équation (A1.4) implique $\vec{q}_{Oh}^{on} \cdot \vec{\nu}_K|_A = 0$. De même pour $A \in \Gamma_w^2$ elle implique $\vec{q}_{Oh}^{on} \cdot \vec{\nu}_K|_A = q_d^n|_A$.

Un premier résultat important et facile à montrer (cf. [7] par exemple) est que le problème (A1.1), ..., (A1.4) admet une solution unique telle que :

$$\vec{q}_{Oh}^{on} = \vec{q}_{Oh}^n, \quad p^{on} = p^n,$$

où \vec{q}_{Oh}^n, p^n sont calculés comme (1.11), ..., (1.13).

Remarque : La pression P^n étant calculée dans le même espace M^0 dans les deux formulations, on supprimera le signe \odot en indice supérieur.

En d'autre termes, la relation existant entre les formulations (1.11), ..., (1.13) et (A1.1), ..., (A1.4) est la suivante. Dans la première, on a dualisé la contrainte d'incompressibilité et la pression en est le multiplicateur de Lagrange. Dans la seconde, on a en plus dualisé les contraintes de continuité des débits à travers les arêtes et les traces de pression en sont les multiplicateurs de Lagrange.

A1.3 - Ecriture matricielle de la nouvelle formulation des équations en pression

Une base naturelle de \vec{X}_h^{\odot} est formée de l'ensemble des fonctions $\{\vec{s}_{K,A}, K \in \mathcal{T}_h, A \in \mathcal{A}_h\}$ telles que $\vec{s}_{K,A}$ a son support dans K , est un élément de \vec{X}_h^{\odot} et $\int_B \vec{s}_{K,A} \cdot \vec{v}_K = \delta_B^A$. On note $Q^{\odot} = (Q_{K,A})_{K \in \mathcal{T}_h, A \in \mathcal{A}_K}$ le vecteur des degrés de liberté de \vec{q}_{0h}^{\odot} . Ce sont les débits totaux des fluides à travers les arêtes d'un élément K dans la direction de la normale extérieure.

On exprime maintenant les équations (A1.1), ..., (A1.4) en termes de degrés de liberté et de bases des différents espaces d'approximation. Les équations (A1.1), ..., (A1.4) s'écrivent alors sous la forme matricielle.

$$(A1.5) \quad \begin{bmatrix} AD^{\odot} & -{}^t\text{DIV}^{\odot} & -{}^tB \\ \text{DIV}^{\odot} & 0 & 0 \\ B & 0 & AC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\odot} \\ P \\ TP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FQ^{\odot} \\ FP \\ FTP \end{bmatrix}$$

Ici AD° est une matrice symétrique définie positive de dimension $3 \times nt + 4 \times nq$. Elle est bloc-diagonale, chaque bloc correspondant à un élément de \mathcal{T}_h et étant de dimension 3 ou 4 suivant que cet élément est un triangle ou un parallélogramme. Donc AD° est facile à inverser. Précisément ses coefficients non nuls, sont, pour $K \in \mathcal{T}_h$, $A \in \mathcal{A}_h$, $B \in \mathcal{A}_h$, $A \subset \partial K$, $B \subset \partial K$:

$$(A1.6) \quad AD_{K,A,B}^\circ = \int_K \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{s}_A \cdot \vec{s}_B dx.$$

La matrice DIV° a $3 \times nt + 4 \times nq$ colonnes et ne lignes. Ses coefficients non nuls sont pour $K \in \mathcal{T}_h$, $A \subset \partial K$

$$(A1.7) \quad DIV_{K,E,K}^\circ = 1.$$

La matrice B a $3 \times nt + 4 \times nq$ colonnes et n_a lignes. Ses coefficients non nuls sont, pour $K \in \mathcal{T}_h$, $A \subset \partial K$, $A \subset \Gamma_w^1$:

$$(A1.8) \quad B_{K,A,A} = -1.$$

La matrice AC est une matrice diagonale de dimension n_a et ses coefficients non nuls sont, pour $A \in \mathcal{A}_h$, $A \subset \Gamma_w^1$:

$$(A1.9) \quad AC_{A,A} = 1.$$

Pour le membre de droite de (A1.5), le vecteur FQ° a la dimension $3 \times nt + 4 \times nq$ et ses composantes sont, pour $K \in \mathcal{T}_h$, $A \subset \partial K$

$$(A1.10) \quad FQ_{K,A}^\circ = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \gamma_j(S_h^n) \psi^{-1} \vec{q}_{jh} \vec{s}_{K,A} dx.$$

Le vecteur FP qui a la dimension n_e est tel que pour $K \in \mathcal{T}_h$,

$$(A1.11) \quad FP_K = 0.$$

Les composantes du vecteur FTP de dimension na sont pour $A \in \mathcal{A}_h$:

$$(A1.12) \quad FTP_A = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est une arête intérieur à } \Omega \text{ ou si } A \in \Gamma_{imp}, \\ p_{dh}^n & \text{si } A \in \Gamma_w^1, \\ -q_{dh}^n & \text{si } A \in \Gamma_w^2. \end{cases}$$

A1.4 - Résolution du système linéaire

Bien que l'équation matricielle (A1.5) ait une dimension plus grande que l'équation matricielle équivalente (1.24), elle est plus facile à résoudre. En effet nous avons noté que la matrice AD^\odot est facile à inverser. Nous pouvons donc éliminer l'inconnue Q^\odot .

$$(A1.13) \quad Q^\odot = AD^{\odot-1} \cdot [FQ^\odot + {}^tDIV^\odot \cdot P + {}^tB \cdot TP],$$

et nous obtenons l'équation matricielle :

$$(A1.14) \quad \begin{bmatrix} DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tDIV^\odot & DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tB \\ B \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tDIV^\odot & AC + B \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ TP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot FQ^\odot \\ FTP - B \cdot AD^{\odot-1} \cdot FQ^\odot \end{bmatrix}$$

Mais alors il est facile de vérifier que la matrice $DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tDIV^\odot$ est une matrice diagonale de dimension ne. Il est donc facile d'éliminer P :

$$(A1.15) \quad P = [DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tDIV^\odot]^{-1} \cdot [-DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot FQ^\odot - DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tB \cdot TP].$$

Enfin on obtient le système linéaire de dimension na :

$$(A1.16) \quad \begin{bmatrix} AC + B \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tB - B \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tDIV^\odot \cdot (DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tDIV^\odot)^{-1} \cdot DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tB \end{bmatrix} TP \\ = FTP - B \cdot AD^{\odot-1} \cdot (FQ^\odot + {}^tDIV^\odot \cdot (DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot {}^tDIV^\odot)^{-1} \cdot DIV^\odot \cdot AD^{\odot-1} \cdot FQ^\odot).$$

Ce système est symétrique défini positif et est donc facile à résoudre, par exemple par une méthode de gradient conjugué avec préconditionnement.

Une fois TP calculé, on calcule P par (A1.15) et Q° par (A1.13).

A1.5 - Modèle à plusieurs types de roches

Pour introduire le modèle à plusieurs types de roche défini au chapitre II, nous procéderons de la façon suivante. Sur chaque arête A de Γ_{12} , pour prendre en compte l'existence des traces de pression P_A^- et P_A^+ , le multiplicateur de lagrange TP_A sera :

$$(A1.17) \quad TP_A = \frac{1}{2} (P_A^- + P_A^+), \quad A \in \Gamma_{12}.$$

Alors, avec (3.32), on obtient,

$$(A1.18) \quad P_A^\varepsilon = TP_A - \frac{\varepsilon}{2} (P_{CMA}^- \gamma^-(S_A^-) - P_{CMA}^+ \gamma^+(S_A^+)), \quad \varepsilon = + \text{ ou } -.$$

Considérons, comme au chapitre II, l'élément K^- inclus dans $\bar{\Omega}_1$ et dont A est une arête incluse dans Γ_{12} . Obtenue en intégrant (2.4) sur K^- par partie, la contribution de K^- à (A1.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{K^-} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{q}_0^{\circ} \cdot \vec{s} \, dx - \int_{K^-} P^n \operatorname{div} \vec{s} \, dx + \sum_{\substack{A \in \partial K^- \\ A \notin \Gamma_{12}}} \int_A TP_A^n \vec{s} \cdot \vec{v} \, d\gamma \\ + \sum_{\substack{A \in \partial K^- \\ A \in \Gamma_{12}}} \int_A P_A^{n-} \vec{s} \cdot \vec{v}_K^- \, d\gamma = \int_{K^-} \sum_{j=1}^2 \gamma_j(S^n) \psi^{-1} \vec{q}_j \cdot \vec{s} \, dx \quad \forall \vec{s} \in \vec{X}_h^{\circ}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (A1.18), cela se réécrit :

$$\begin{aligned} \int_{K^-} \frac{1}{d(S^n)} \psi^{-1} \vec{q}_0^{\circ} \cdot \vec{s} \, dx - \int_{K^-} P^n \operatorname{div} \vec{s} \, dx + \int_{\partial K^-} TP^n \vec{s} \cdot \vec{v} \, d\gamma = \\ \int_{K^-} \sum_{j=1}^2 \gamma_j(S^n) \psi^{-1} \vec{q}_j \cdot \vec{s} \, dx - \frac{1}{2} \sum_{\substack{A \in \partial K^- \\ A \in \Gamma_{12}}} \int_A (P_{CMA}^- \gamma^-(S_A^{n-}) - P_{CMA}^+ \gamma^+(S_A^{n+})) \vec{s} \cdot \vec{v} \, d\gamma. \end{aligned}$$

On procède de façon analogue pour l'élément K^+ inclus dans $\bar{\Omega}_2$ et tel que $A \in \partial K^- \cap \partial K^+$.

En définitive pour introduire la contribution des différents types de roches, il suffit de modifier (A1.10) en écrivant pour les arêtes A de Γ_{12} :

$$FQ_{K^{\varepsilon},A}^{\odot} = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \gamma_j(S_h^n) \vec{q}_{jh} \cdot \vec{s}_{K^{\varepsilon},A} dx +$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_A (P_{CMA}^- \gamma^-(S_A^{n-}) - P_{CMA}^+ \gamma^+(S_A^{n+})) \vec{s} \cdot \vec{\nu} d\gamma, \quad \varepsilon = + \text{ ou } -.$$

A1.6 Introduction des puits dans le modèle x-y

Nous considérons le macroélément \mathcal{P} comme un élément pouvant avoir plus de 4 côtés. Les débits sortant de \mathcal{P} à travers les arêtes $A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$ sont notés $Q_{\mathcal{P},A}$. On supprime toute contribution des éléments $K \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}_h}$ et on écrit les relations suivantes (cf. (3.1), (3.2)) :

$$(A1.19) \quad \frac{1}{\alpha_A} Q_{\mathcal{P},A} - (P_{\mathcal{P}} - TP_A) = 0, \quad A \in \Gamma_{\mathcal{P}},$$

$$(A1.20) \quad \sum_{A \in \Gamma_{\mathcal{P}}} Q_{\mathcal{P},A} + Q_{\mathcal{P}} = 0$$

Ces deux relations jouent pour \mathcal{P} le rôle de (A1.1) et (A1.3). La pression $P_{\mathcal{P}}$ joue pour \mathcal{P} le rôle de P_K pour K. Enfin, la continuité des débits s'écrit :

$$(A1.21) \quad Q_{\mathcal{P},A} + Q_{K,A} = 0, \quad A \in \partial K \cap \Gamma_{\mathcal{P}},$$

relation qui correspond à (A1.4).

Dans le cas où la pression $P_{\mathcal{P}}$ est imposée, on écrit les relations (A1.19), (A1.21), et la relation $P_{\mathcal{P}} =$ donnée au lieu de (A1.20). De façon analogue à ce qu'on a fait au §A1.4, on élimine successivement les débits $Q_{\mathcal{P},A}$ en même temps que les $Q_{K,A}$ et la pression $P_{\mathcal{P}}$ en même que les P_K . On aboutit à un système linéaire en TP qu'on résout. On en déduit les pressions P_K , puis les débits à travers les arêtes, et le débit $Q_{\mathcal{P}}$ est alors donné par (A1.20).

Dans le cas où le débit $Q^{\mathcal{P}}$ est donné, on écrit les relations (A1.19), ..., (A1.21) et on procède comme précédemment.

A1.7 le modèle x - z

Dans ce cas, outre les relations (4.1), (4.2), nous avons la relation de conservation pour tous les éléments traversés par le puits :

$$(A1.22) \quad \sum_{A \in \partial K} Q_{K,A} + Q^{\mathcal{P}}_K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{TP}_h.$$

Dans le cas où la pression $P^{\mathcal{P}}_{K_0}$ est imposée, alors de (4.1) et (A1.22), on déduit

$$(A1.23) \quad \sum_{A \in \partial K} Q_{K,A} + \alpha_K P_K = \alpha_K P^{\mathcal{P}} + \beta_K \quad \forall K \in \mathcal{TP}_h,$$

relation qui remplace (A1.3) pour les éléments K de \mathcal{TP}_h . Ainsi d'une part FP n'est plus nul comme en (A1.11) mais on a :

$$FP_K = \alpha_K^n P^{\mathcal{P}}_{K_0} + \beta_K^n, \quad \forall K \in \mathcal{TP}_h.$$

De plus, quand on élimine Q° , il faut ajouter dans (A1.14) aux coefficients de la matrice diagonale $DIV^{\circ} \cdot A Q^{\circ-1} \cdot DIV^{\circ}$, α_K^N sur les lignes correspondant à $K \in \mathcal{TP}_h$.

Dans le cas où le débit $Q^{\mathcal{P}}$ est imposé, il est faut alors éliminer la pression $P^{\mathcal{P}}_{K_0}$, ce qui est fait comme au §4.3. Portant (4.12) dans (A1.22), on obtient, au lieu de (A1.5) le système linéaire :

$$\begin{bmatrix} AD^{\circ} & -t_{DIV^{\circ}} & t_B \\ DIV^{\circ} & AB & 0 \\ B & 0 & AC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{\circ} \\ 0 \\ TP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FQ^{\circ} \\ FP \\ FTP \end{bmatrix}$$

où AB et FP sont définis maintenant comme en (4.13), (4.14). On élimine Q° comme précédemment et on obtient :

$$\begin{bmatrix} \text{DIV}^\circ \cdot \text{AD}^{\circ-1} \cdot t_{\text{DIV}^\circ + \text{AB}} & \text{DIV}^\circ \cdot \text{AD}^{\circ-1} \cdot t_B \\ B \cdot \text{AD}^{\circ-1} \cdot t_{\text{DIV}^\circ} & \text{AC} + B \cdot \text{AD}^{\circ-1} \cdot t_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ TP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{FP} - \text{DIV}^\circ \cdot \text{AD}^{\circ-1} \cdot \text{FQ}^\circ \\ \text{FTP} - B \cdot \text{AD}^{\circ-1} \cdot \text{FQ}^\circ \end{bmatrix}$$

Pour éliminer P, il faut tenir compte de ce que la matrice AB n'est pas diagonale, mais est composée d'un bloc diagonal reliant tous les éléments K traversés par le puits. Il s'agit néanmoins d'un bloc diagonal de petite dimension, qu'un peut donc facilement inverser. Une fois P éliminé, la fin de la résolution est inchangée.

A1.8 Le modèle r-z

Pour ne pas compliquer les notations, on continuera de noter \vec{q}_0° l'approximation dans \vec{X}_h° du vecteur \vec{q}^* défini en (5.1), (5.2). Les équations (5.5), (5.6) s'écrivent :

$$(A1.24) \quad Q_{K,A} = \alpha_A (TP_A - P \mathcal{P}_{A_0}) + \beta_A, \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad A \in \Gamma_{\mathcal{P}},$$

$$(A1.25) \quad \sum_{A \in \Gamma_{\mathcal{P}}} Q_{K,A} = Q \mathcal{P}.$$

Dans le cas où la pression $P \mathcal{P}_{A_0}$ est donnée, la relation (A1.24) joue le rôle d'une condition sur le bord $\Gamma_{\mathcal{P}}$. Alors le système linéaire que nous obtenons s'écrit encore sous la forme (A1.5). Evidemment $\text{AD}^\circ, \text{FQ}^\circ$ sont maintenant calculés avec Ψ^* au lieu de ψ . Quant à FTP, aux relations (A1.12) il faut ajouter :

$$\text{FTP}_A = \alpha_A P \mathcal{P}_{A_0} - \beta_A, \quad A \in \Gamma_{\mathcal{P}},$$

et pour AC, aux relations (A1.9) il faut ajouter :

$$AC_{A,A} = \alpha_A.$$

On procède ensuite comme précédemment. Une fois calculés les débits $Q_{K,A}$ on peut calculer $Q_{\mathcal{P}}$ grâce à (A1.25).

Dans le cas où le débit $Q_{\mathcal{P}}$ est donné, alors on élimine $P_{\mathcal{P}_{A_0}}$ entre (A1.24) et (A1.25) et on trouve :

$$(A1.26) \quad Q_{K,A} = \alpha_A \left(TP_A - \frac{1}{\sum_{B \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \alpha_B} \alpha_B TP_B \right) + \beta_A + \frac{\alpha_A}{\sum_{B \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \alpha_B} (Q_{\mathcal{P}} - \sum_{B \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \beta_B)$$

Là encore, le système linéaire obtenu s'écrit encore sous la forme (A1.5) avec les différences suivantes .

Pour FTP, aux relations (A1.12) il faut ajouter :

$$FTP_A = \beta_A + \frac{\alpha_A}{\sum_{B \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \alpha_B} (Q_{\mathcal{P}} - \sum_{B \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \beta_B), \quad A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$$

Concernant la matrice AC, il faut noter qu'elle n'est plus diagonale car on a introduit un bloc diagonal reliant les arêtes $A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$:

$$AC_{A,A} = \alpha_A \left(1 - \frac{\alpha_A}{\sum_{B \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \alpha_B} \right), \quad A \in \Gamma_{\mathcal{P}},$$

$$AC_{A,A'} = - \frac{\alpha_A \alpha_{A'}}{\sum_{B \in \Gamma_{\mathcal{P}}} \alpha_B}, \quad A \in \Gamma_{\mathcal{P}}, \quad A' \in \Gamma_{\mathcal{P}}, \quad A \neq A'.$$

On procédera cependant comme précédemment, mais la structure du système linéaire en TP obtenu après élimination de Q^{\odot} et P sera un peu différente. Il y aura un peu plus de coefficients non nuls correspondant aux relations connectant entre elles les arêtes $A \in \Gamma_{\mathcal{P}}$.

ANNEXE 2 - LIMITATION DES PENTES DE LA SATURATION

A2.1 Introduction

Telle quelle, la méthode décrite dans les chapitres précédents pour calculer des saturations, produit, dans les cas où la convection est dominante, des oscillations et des saturations négatives ou supérieures à 1. De plus, sa stabilité est réduite (cf. [18]). Ces défauts, inhérents aux schémas d'ordre supérieur en espace et explicites d'ordre 1 en temps pour les équations du premier ordre, peuvent être corrigés par une méthode de limitation des pentes.

Une telle méthode a été décrite pour la première fois en dimension 1 dans [17]. Considérant une approximation discontinue linéaire par morceaux, on limite les pentes sur chaque intervalle K de la discrétisation de façon que la valeur de la fonction à chaque extrémité de K soit comprise entre le minimum et le maximum des valeurs moyennes dans K et l'intervalle adjacent à K .

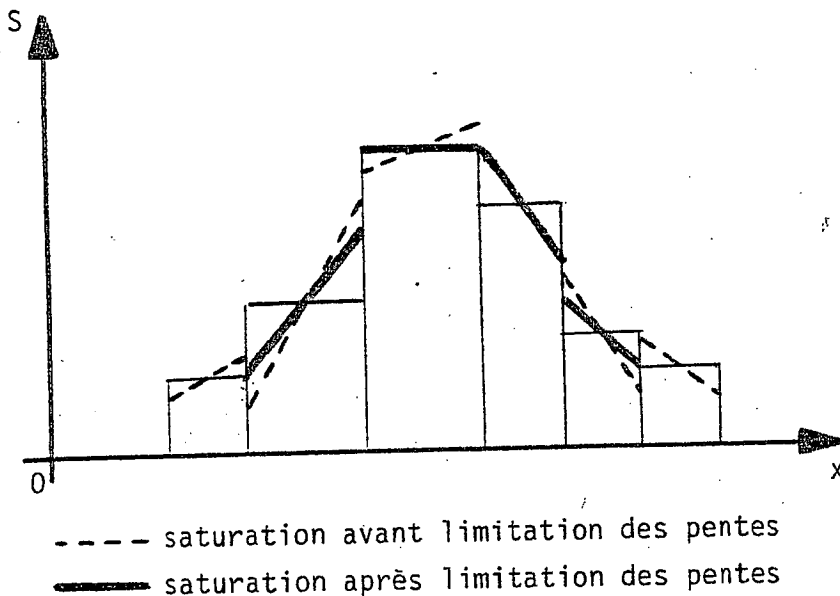


Figure A2.1 : Limitation des pentes en dimension 1.

Evidemment, une telle méthode introduit un peu de diffusion numérique sur le front, mais beaucoup moins qu'une méthode d'ordre 1.

Nous allons étendre cette méthode au cas de la dimension 2. En fait la même façon de faire s'applique à la dimension 3.

A2. 2 Limitation des pentes en dimension 2

On note S^* la saturation que nous avons noté S^{n+1} auparavant. Nous allons modifier S^* de façon à obtenir une nouvelle saturation S^{n+1} dont les variations auront été limitées.

Pour cela, on note $\bar{S}_K = \frac{1}{ns(K)} \sum_{i=1}^{ns(K)} S_{K,i}$, $K \in \mathcal{T}_h$, la valeur moyenne de S_h dans l'élément K . Pour que le schéma reste conservatif, il faut que S^{n+1} et S^* aient les mêmes valeurs moyennes dans tous les éléments, soit :

$$\bar{S}_K^{n+1} = \bar{S}_K^*, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Nous limiterons les pentes des saturations de la façon suivante. Pour tout sommet M du maillage, on considère l'ensemble $\mathcal{T}(M)$ des éléments $K \in \mathcal{T}_h$ dont M est un sommet et on calcule le minimum et le maximum des saturations moyennes dans ces éléments.

$$SMIN(M) = \min_{K \in \mathcal{T}(M)} \bar{S}_K^*, \quad SMAX(M) = \max_{K \in \mathcal{T}(M)} \bar{S}_K^*.$$

Dans chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$, le degré de liberté $S_{K,i}$, $i=1, \dots, ns(K)$ est associé au sommet M_i . Nous limitons les pentes en imposant que :

$$SMIN(M_i) \leq S_{K,i}^{n+1} \leq SMAX(M_i), \quad i = 1, \dots, ns(K).$$

Enfin, nous exigeons que, dans chaque élément K , la distance dans $\mathbb{R}^{ns(K)}$ de $SK^{n+1} = (S_{K,i}^{n+1})_{i=1, \dots, ns(K)}$ à $SK^* = (S_{K,i}^*)_{i=1, \dots, ns(K)}$ soit aussi petite que possible.

Le calcul de SK^{n+1} à partir de SK^* se ramène donc à un problème de projection dans $\mathbb{R}^{ns(K)}$.

Notons :

$$(PK), \text{ l'hyperplan d'équation } \sum_{i=1}^{ns(K)} X_i = ns(K) \cdot \bar{S}_K^*,$$

$$\begin{aligned}
 & (QK), \text{ l'hypercube } \prod_{i=1}^{ns(K)} [SMIN(M_i), SMAX(M_i)], \\
 & \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{ns(K)} x_i y_i, \text{ le produit scalaire dans } \mathbb{R}^{ns(K)}, \\
 & \|y-x\| = \sqrt{\langle y-x, y-x \rangle}, \text{ la distance dans } \mathbb{R}^{ns(K)} \text{ associée,} \\
 & J(X) = \frac{1}{2} \|X - SK^*\|^2,
 \end{aligned}$$

$$U, \text{ le vecteur orthogonal à } (PK) \quad \begin{cases} U = (1, 1, 1) \text{ si } ns(K)=3 \\ U = (1, 1, 1, 1) \text{ si } ns(K)=4 \end{cases}$$

Avec ces notations, la recherche de SK^{n+1} s'écrit comme le problème de minimisation dans $\mathbb{R}^{ns(K)}$ suivant :

$$(A2.1) \quad \begin{cases} \text{Trouver } SK^{n+1} \in (PK) \cap (QK) \text{ tel que} \\ J(SK^{n+1}) = \min_{X \in (PK) \cap (QK)} J(X). \end{cases}$$

C'est un problème de minimisation convexe qui admet une solution unique puisque $(PK) \cap (QK) \neq \emptyset$ (le point X tel que $X_i = \bar{S}_K^*$, $i=1, \dots, ns(K)$ appartient à $(PK) \cap (QK)$).

A2.3 - Résolution du problème de minimisation (A.21)

Pour résoudre le problème de minimisation (A2.1), on dualise la contrainte $X \in (PK)$. On introduit donc le lagrangien L défini sur $\mathbb{R}^{ns(K)} \times \mathbb{R}$ par :

$$L(X, \mu) = J(X) - \mu \left[\left(\sum_{i=1}^{ns(K)} X_i \right) - ns(K) \cdot \bar{S}_K^* \right].$$

Alors le problème (A2.1) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver le point selle } (SK^{n+1}, \lambda) \in (QK) \times \mathbb{R} \text{ tel que :} \\
 (A2.2) \quad & L(SK^{n+1}, \lambda) = \min_{X \in (QK)} \max_{\mu \in \mathbb{R}} L(X, \mu) = \max_{\mu \in \mathbb{R}} \min_{X \in (QK)} L(X, \mu).
 \end{aligned}$$

C'est ce dernier problème que nous allons résoudre effectivement.
Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on résout donc d'abord :

$$(A2.3) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \hat{X}(\mu) \in (QK) \text{ tel que} \\ L(\hat{X})(\mu), \mu = \min_{X \in (QK)} L(X, \mu) \end{cases}$$

Or on remarque que, comme $SK^* \in (PK)$, on a $\langle U, SK^* \rangle = ns(K) \cdot \bar{S}_K^*$. Le lagrangien L se réécrit donc :

$$L(X, \mu) = \frac{1}{2} \|X - (SK^* - \mu U)\|^2 - \frac{\mu^2}{2} \|U\|^2.$$

On constate ainsi que le problème de minimisation (A2.3) revient donc à minimiser la distance de $SK^* - \mu U$ à l'hypercube (QK) . Sa solution $\hat{X}(\mu)$ est donc la projection sur (QK) de $SK^* - \mu U$:

$$(A2.4) \quad \hat{X}(\mu) = \text{Proj}_{(QK)} (SK^* - \mu U)$$

Cette projection est une opération très simple qui se réduit à une simple troncature des composantes de $SK^* - \mu U$.

Le problème (A2.3) étant résolu, il nous reste, pour compléter la résolution du problème (A2.2), à trouver le maximum λ de la fonction d'une variable réelle $\mu \rightarrow F(\mu) = L(\hat{X}(\mu), \mu)$. Le point SK^{n+1} cherché sera tel que

$$SK^{n+1} = \hat{X}(\lambda)$$

où

$$\lambda = \max_{\mu \in \mathbb{R}} F(\mu).$$

Pour trouver le maximum de la fonction F calculons ses dérivées :

$$F'(\mu) = \langle U, \hat{X}(\mu) \rangle = \sum_{i=1}^{ns(K)} \hat{X}_i(\mu)$$

$$F''(\mu) = \sum_{i=1}^{ns(K)} \hat{X}'_i(\mu).$$

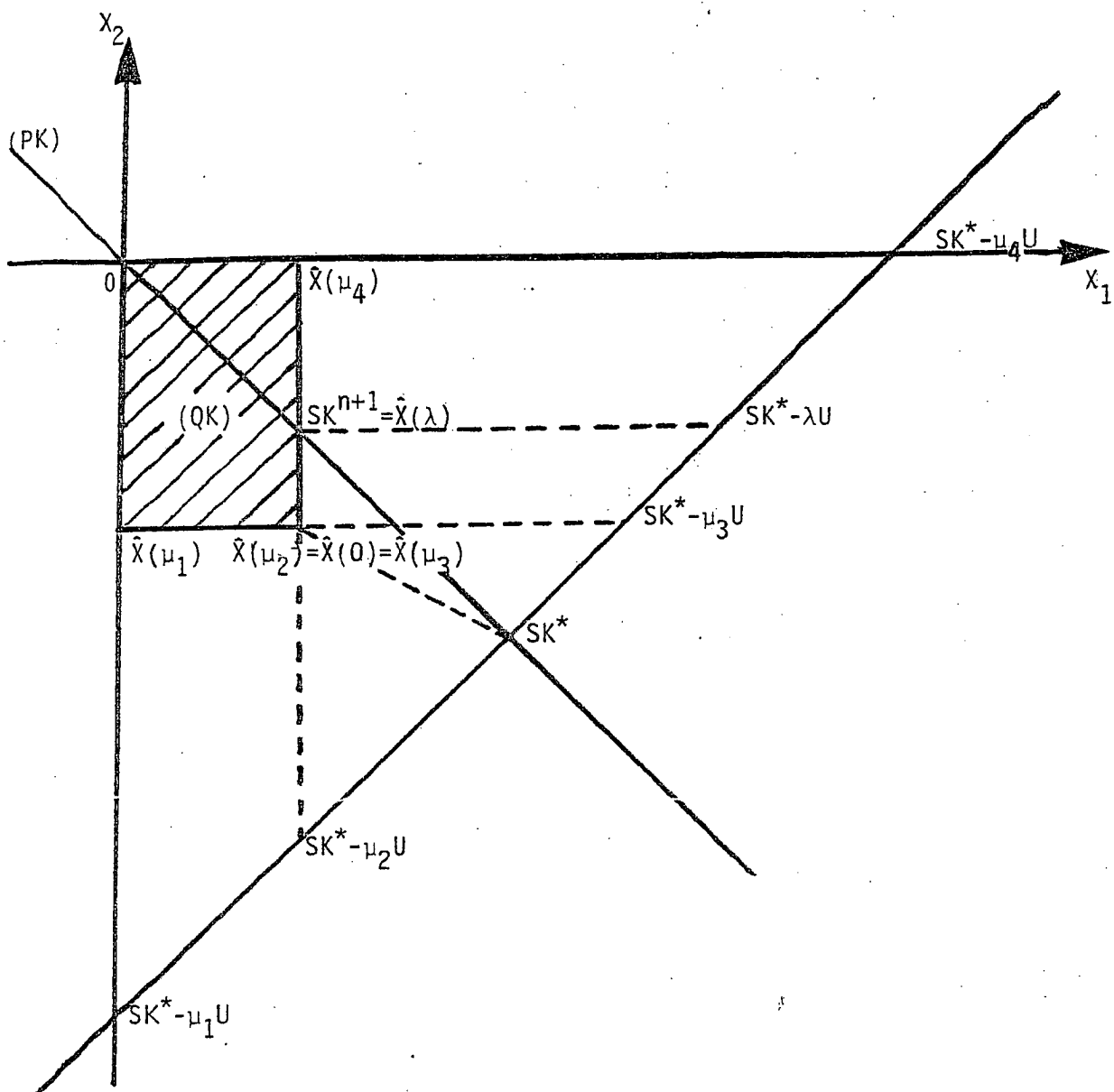


Figure A2.3 La recherche de SK^{n+1} par la méthode de dualité en dimension 1 ($ns(K)=2$).

En conclusion, la méthode de limitation des pentes de la saturation se ramène à la maximisation, pour chaque élément K du maillage, d'une fonction d'une variable, dérivable, quadratique par morceaux et simple à calculer. Elle est donc peu coûteuse, d'autant plus que la limitation des pentes n'est effective qu'au voisinage des fronts de saturation.

$\hat{X}(\mu)$ étant défini par (A2.4), si $\hat{X}_i(\mu) = S_{K,i}^* - \mu \in [\text{SMIN}(M_i), \text{SMAX}(M_i)]$, alors $\hat{X}'_i(\mu) = -1$ et si $S_{K,i}^* - \mu \notin [\text{SMIN}(M_i), \text{SMAX}(M_i)]$, alors $\hat{X}_i(\mu) = \text{SMIN}(M_i)$ ou $\hat{X}_i(\mu) = \text{SMAX}(M_i)$ et $\hat{X}'_i(\mu) = 0$. Donc,

$$F''(\mu) = -\text{card}\{i \in \{0, 1, 2, \dots, \text{ns}(K)\} \mid S_{K,i}^* - \mu \in [\text{SMIN}(M_i), \text{SMAX}(M_i)]\},$$

c'est-à-dire $F''(\mu)$ est égal à moins le nombre de coordonnées de $\hat{X}(\mu)$ qui sont libres.

Ainsi F est une fonction concave, continue et dérivable, quadratique par morceaux. F'' à $2 \times \text{ns}(K)$ points de discontinuité μ_i qui apparaissent quand $\hat{X}(\mu)$ traversent des faces de l'hypercube (QK). La fonction F est donc entièrement connue et il est donc simple de calculer la valeur λ pour laquelle elle atteint son maximum.

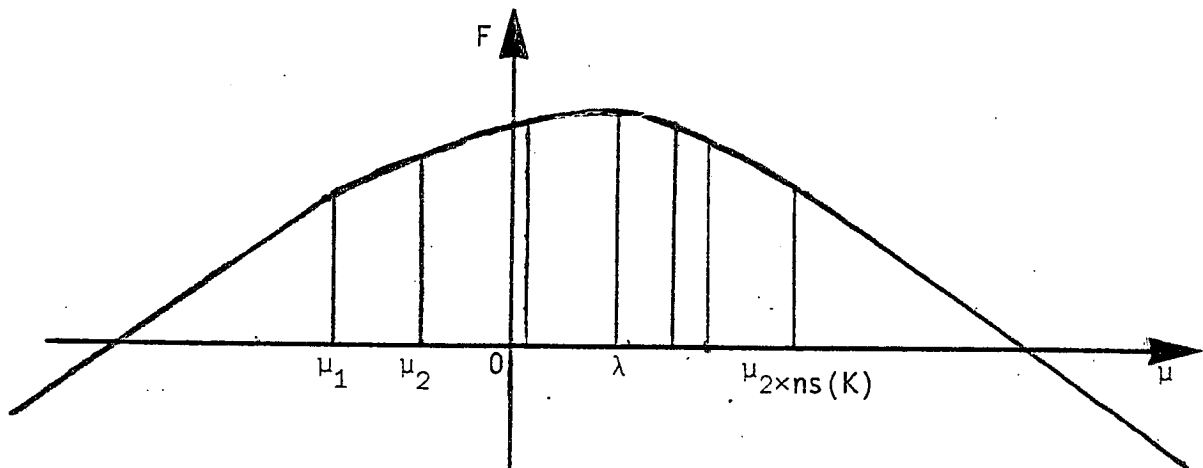


Figure A2.2 : Un exemple de fonction F à maximiser.

La figure A2.3 ci-dessous montre, dans le cas de limitation de pentes de saturation en dimension 1 ($\text{ns}(K)=2$), comment fonctionne la méthode de dualité.

NOMENCLATURE

$x = (x_1, x_2)$ vecteur de \mathbb{R}^2 , coordonnées dans le domaine bidimensionnel $\tilde{\Omega}$,

Propriétés de la roche

$\phi(x)$ = porosité

$K_1(x), K_2(x)$ = perméabilités absolues dans les directions des axes

$\sigma(x)$ = épaisseur du gisement dans les modèles x-y et x-z ou angle du secteur radial circulaire dans le modèle r-z.

Inconnues physiques

P_w, P_o = pressions dans les phases eau et huile

\bar{S} = saturation en eau

$S = (\bar{S} - \bar{S}_m(x)) / (\bar{S}_M(x) - \bar{S}_m(x))$ = saturation réduite en eau

Propriétés des fluides

ρ_j, μ_j = densités et viscosités de l'eau ($j=w$) et de l'huile ($j=o$)

Caractéristiques dépendant à la fois des fluides et de la roche

$\tilde{\Omega}_i$, sous domaine de $\tilde{\Omega}$ correspondant au ième type de roche

Dans $\tilde{\Omega}_i$:

$\bar{S}_m^i(x)$ [resp. $1 - \bar{S}_M^i(x)$] = saturation résiduelle en eau (resp. irréductible en huile)

$k_{rj}^i(S)$ = perméabilités relatives à l'eau ($j=w$) et à l'huile ($j=o$)

$P_w - P_o = P_{CM}(x) P_c^i(S)$ = pression capillaire

$P_{CM}(x) \geq 0$ pression capillaire maximum du point x

$P_c^i(S)$, fonction capillaire réduite croissante s'annulant pour $S = S_c^i$
(en général $S_c^i = 1$)

Coefficients et champs de vecteur connus ne dépendant que de x

$$\psi(x) = (\bar{S}_M(x) - \bar{S}_m(x)) \sigma(x) \phi(x)$$

$$\Psi(x) = \sigma(x) \begin{bmatrix} K_1(x) & 0 \\ 0 & K_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \frac{1}{2} \psi(x) (\rho_w + \rho_o) g \nabla z(x) \quad (g = \text{accélération de la pesanteur})$$

$$\vec{d}_2 = - \psi(x) \nabla P_{CM}(x)$$

Fonctions et coefficients dépendant de S seulement

Correspondant au ième type de roche :

$$k_j^i(S) = k_{rj}(S) / \mu_j = \text{mobilités de l'eau } (j = w) \text{ et de l'huile } (j = o)$$

$$a^i(S) = \frac{k_w^i k_o^i}{(k_w^i + k_o^i)^2} \frac{dp_c^i}{dS} \geq 0$$

$$\alpha^i = \int_0^S a^i(s) ds \quad \text{croissante}$$

$$b_0^i(S) = \frac{k_w^i}{k_w^i + k_o^i} \quad \text{croissante}$$

$$b_1^i(S) = \frac{k_w^i k_o^i}{k_w^i + k_o^i} \frac{2(\rho_w - \rho_o)}{\rho_w + \rho_o}$$

$$b_2^i(S) = \frac{k_w^i + k_o^i}{k_w^i - k_o^i} p_c^i(S)$$

$$\gamma^i(s) = \frac{1}{2} \int_{S_c^i}^S b_o^i(s) \frac{dp_c^i}{ds}(s) ds \quad (|\gamma(s)| \leq \frac{1}{2} |p_c(s)|)$$

$$\gamma_1^i(s) = \frac{k_w^i \rho_w + k_o^i \rho_o}{k_w^i + k_o^i} \frac{2}{\rho_w + \rho_o}$$

$$\gamma_2^i(s) = \frac{1}{2} \int_{S_c^i}^S \frac{db_o^i}{ds}(s) p_c(s) ds$$

$$d^i(s) = k_w^i + k_o^i$$

Inconnues principales

S = saturation réduite en eau

$$P^i = \frac{1}{2} (P_w + P_o) + P_{CM}(x) \gamma^i(s) \text{ pression globale dans la zone } i$$

Inconnues auxiliaires

$\vec{\psi}_w$ [resp. $\vec{\psi}_o$] = vitesse de Darcy de l'eau [resp. de l'huile]

$$\vec{r} = -\psi P_{CM} d^i(s) \nabla \alpha^i(s) = \text{contribution de la diffusion capillaire} \quad \frac{\vec{\psi}_w - \vec{\psi}_o}{2}$$

$$\vec{q}_o = \vec{\psi}_w + \vec{\psi}_o = \text{vitesse volumétrique totale}$$

$$\vec{\psi}_w = \sum_{j=0}^2 b_j(s) \vec{q}_j + \vec{r} \quad \vec{\psi}_o = \vec{q}_o - \sum_{j=0}^2 b_j(s) \vec{q}_j - \vec{r}$$

Géométrie du gisement

$\tilde{\Omega}$ = domaine bidimensionnel polygonal,

$\partial\tilde{\Omega}$ = frontière de $\tilde{\Omega}$,

ν^{Ω} = normale unitaire à $\partial\tilde{\Omega}$ extérieure à $\tilde{\Omega}$,

Γ_{imp} = frontière imperméable de $\tilde{\Omega}$,

Γ_{ℓ}^1 = frontière d'alimentation en fluide ℓ à pression donnée , $\ell = w, o$,

Γ_{ℓ}^2 = frontière d'alimentation en fluide ℓ à débit donné , $\ell = w, o$.

Données initiales et au bord

S_0 = saturation initiale,

q_d = débit volumétrique total donné sur Γ_{ℓ}^2 , $\ell = w, o$,

p_d = pression donnée sur Γ_{ℓ}^1 , $\ell = w, o$.

Approximation

\mathcal{T}_h = maillage régulier de $\tilde{\Omega}$ fait de triangles et parallélogrammes,

\mathcal{A}_h = ensemble des arêtes de \mathcal{T}_h ,

nt = nombre de triangles de \mathcal{T}_h ,

nq = nombre de parallélogrammes de \mathcal{T}_h ,

ne = nombre d'éléments de $\mathcal{T}_h = nt + nq$,

na = nombre d'arêtes de \mathcal{T}_h ,

ns = nombre de sommets de \mathcal{T}_h ,

K , élément courant de \mathcal{T}_h (triangle ou parallélogramme),

A , élément courant de \mathcal{A}_h ,

$ns(K)$ nombre de sommets de K (3 ou 4),

\hat{K} , élément de référence (cf. §1.7),

J_K , jacobien de la transformation affine appliquant \hat{K} sur K ,

$\vec{\nu}_A$, normale unitaire à A définissant le sens positif de traversée de A ,

$z_{A,K} = \begin{cases} +1 & \text{si } A \subset \partial K \text{ et si } \vec{\nu}_A \text{ est sortant de } K, \\ -1 & \text{si } A \subset \partial K \text{ et si } \vec{\nu}_A \text{ est entrant dans } K, \end{cases}$

K^- (resp. K^+) élément adjacent à l'arête A amont (resp. aval) par rapport au sens positif de traversée de A défini par \vec{v}_A ,

M_h^0 , ensemble des fonctions de $\tilde{\Omega}$ dans \mathbb{R} constantes sur chaque élément de \mathcal{C}_h = espace d'approximation de P (cf. §1.3),

M_h^1 , ensemble des fonctions de $\tilde{\Omega}$ dans \mathbb{R} , discontinues d'un élément à l'autre et qui sont :
 - pour chaque triangle de \mathcal{C} , linéaires sur le triangle
 - pour chaque parallélogramme de \mathcal{C} , linéaires sur les côtés du parallélogramme.
 = espace d'approximation de S (cf. §1.3)

\vec{X}_h^0 , ensemble des fonctions de $\tilde{\Omega}$ dans \mathbb{R}^2 dont chaque composante est un polynôme sur chaque élément de \mathcal{C}_h et dont le flux à travers chaque arête A de \mathcal{C}_h est constant sur A et continu.
 = espace d'approximation de \vec{q}_0 et \vec{r} (cf. §1.3),

$TM_h^0(\partial\tilde{\Omega})$, ensemble des fonctions de $\partial\tilde{\Omega}$ dans \mathbb{R} qui sont constantes sur chaque arête A de \mathcal{C}_h ,

v_K , fonction de base de M_h^0 associée à l'élément K,

$v_{K,j}$, fonction de base de M_h^1 associée au j^{ème} sommet de l'élément K,

\vec{s}_A , fonction de base de \vec{X}_h^0 associée à l'arête A,

$P = (P_K)_{K \in \mathcal{C}_h}$ vecteur approchant la pression P,

$S = (S_{K,j})_{K \in \mathcal{C}_h, j=1, \dots, ns(K)}$ vecteur approchant la saturation S,

$SK = (S_{K,j})_{j=1, \dots, ns(K)}$ saturation aux sommets de l'élément K,

$Q = (Q_A)_{A \in \mathcal{A}_h}$ vecteur approchant la vitesse totale \vec{q}_0 ,

Q_A , débit eau + huile à travers l'arête A,

$R = (R_A)_{A \in \mathcal{A}_h}$, vecteur approchant \vec{r} ,

$SEXT_A$, trace de la saturation sur l'arête A du bord de Ω , extérieure à Ω (constante sur A),

$Q_j = (Q_{jA})_{A \in \mathcal{A}_h}$, vecteur approchant \vec{q}_j , $j=1,2$,

$F_A(k)$, fonction débit d'eau partiel hors pression capillaire associée à l'arête A (cf. (1.25)),

$QWP_A(k)$, fonction débit d'eau partiel associée à l'arête A (cf. (1.29)),

$npi(K)$, nombre de points d'intégration sur l'élément K,

$npi(A)$, nombre de points d'intégration sur l'arête A,

GA_ℓ $\ell=1, \dots, npi(A)$ points d'intégration numériques sur l'arête A de \mathcal{T}_h ,

ξ , saturation de Godounov sur les arêtes de \mathcal{A}_h ,

Δt , pas de discrétisation en temps,

ω , coefficient d'augmentation de Lagrangien augmenté.

Puits

\mathcal{P} , puits,

$M_{\mathcal{P}}$, macroélément entourant le puits \mathcal{P} dans le modèle x-y,

$\Gamma_{\mathcal{P}}$, bord de $M_{\mathcal{P}}$ pour le modèle x-y ou bord du puits \mathcal{P} dans les modèles x-z et r-z,

$\mathcal{E}_{\mathcal{P}_h}$, ensemble des éléments formant $M_{\mathcal{P}}$ dans le modèle x-y, ensemble des éléments percés par le puits \mathcal{P} dans le modèle x-z, ensemble des éléments adjacents au puits \mathcal{P} dans le modèle r-z,

$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_h}$, ensemble des arêtes intérieures à $M_{\mathcal{P}}$ dans le modèle x-y,

$\Omega = \tilde{\Omega} \setminus M_{\mathcal{P}}$ dans le modèle x-y,

$Q_{\mathcal{P}}$, débit total au puits,

$Q\mathcal{S}_A, Q\mathcal{S}_{wA}, Q\mathcal{S}_{oA}$, débits total, en eau et en huile à travers l'arête A du macroélément dans le modèle x-y, ou dans la couche A dans des modèles x-z et r-z.

$P\mathcal{S}$, pression au puits dans le modèle x-y,

$P\mathcal{S}_A$, pression au puits dans la couche A dans les modèles x-z et r-z,

$P\mathcal{S}_{A_0}$, pression au puits dans la couche A_0 où elle est mesurée,

$I_{\mathcal{S}}$, indice de production des puits

Indices supérieurs

n, indice du pas de temps

i, indice de la zone $\tilde{\Omega}_i$.

Les indices sont omis quand il n'y a pas d'ambiguïté.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C. BERTRAND , "Représentation de puits dans un modèle de gisement", Rapport de stage INRIA-SNEA(P), (Juin 1982).
- [2] G. CHAVENT , " A new formulation of diphasic incompressible flows in porous media", Lecture notes in mathematics, 503, Springer (1976).
- [3] G. CHAVENT , "Simulation de puits dans les modèles de réservoirs aux éléments finis", 6^{ème} Colloque international sur les méthodes de calcul scientifique et technique, Versailles, (12-16 Déc. 1983).
- [4] G. CHAVENT , G. COHEN , J. JAFFRE , "Discontinuous upwinding and mixed finite elements for two-phase flow in reservoir simulation", à paraître dans Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- [5] G. CHAVENT , J. JAFFRE , G. COHEN , M. DUPUY , I. RIBERA , "Simulation of two-dimensional waterflooding by using mixed finite elements", SPE Journal, (Août 1984), pp. 382-390.
- [6] G. CHAVENT , G. SALZANO, "A finite element method for the 1-D water-flooding problem with gravity", J. of Comp. Physics, 45, n°3, (1982) p. 307-344.
- [7] G. CHAVENT , J. JAFFRE , "Mathematical Methods and Finite Elements for Reservoir Simulation", North-Holland, à paraître (1985).
- [8] G. COHEN , "Eléments finis mixtes appliqués à un problème d'écoulement diphasique incompressible bidimensionnel en milieu poreux en présence de gravité", Rapport INRIA n°138, (1982).
- [9] J.M. FORTIN , R. GLOWINSKI , "Méthodes de Lagrangien Augmenté", Dunod Paris, (1982).
- [10] S.K. GODUNOV , "Finite Difference Methods for numerical computation of discontinuous solution of the equations of fluids dynamics", Math. Sb. 47, n°3, (1959), p. 271-290.

- [11] J. JAFFRE., *"Eléments finis mixtes et décentrage pour les équations de diffusion convection"*, à paraître dans *Calcolo* (1984).
- [12] J. JAFFRE., *"Formulation mixte d'écoulements diphasiques incompressibles dans un milieu poreux"*, rapport INRIA n°37, (1980).
- [13] J. JAFFRE., J. ROBERTS., *"Upstream weighting and mixed finite elements in the simulation of miscible displacements"*, rapport INRIA n°263, (1983 à paraître dans *RAIRO Analyse Numérique*.
- [14] P. LESAINT., P.A. RAVIART., *"On a finite element method for solving the neutron transport equation"*, *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations*, Ed. Carl de Boor, Academic Press, (1974).
- [15] P.A. RAVIART., J.M. THOMAS., *"A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems"*, *Mathematical aspects of the finite element method*, Ed. Galligani and Magenes, *Lecture notes in mathematics*, 606, Springer (1977).
- [16] D.N. ARNOLD., J. BREZZI, *"Mixed and nonconforming finite element methods : implementation, postprocessing and error estimates"*, à paraître dans *RAIRO Analyse Numérique*.
- [17] B. VAN LEER., *"Towards the ultimate conservative scheme IV. A new approach to numerical convection"*, *J. Comp. Phys.* 23 (1977), pp. 276-299.
- [18] G. CHAVENT., B. COCKBURN, *"Consistence et stabilité des schémas LRG"*, rapport INRIA à paraître.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

1)

2)

3)

4)

5)

6)

7)

8)

9)

10)